BÀI GIẢNG: TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ HÀM SỐ
CHUYÊN ĐỀ: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ
MÔN: TOÁN 12

GIÁO VIÊN: ĐOÀN NGỌC DUY TRÌNH

MỤC TIÊU

- ✓ *Nắm được định nghĩa tính đơn điệu của hàm số; điều kiện để hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên một khoảng thông qua dấu của đạo hàm.*
- ✓ *Hiểu và xác định được cực trị của hàm số (điểm cực đại, cực tiểu).*
- ✓ *Biết cách sử dụng bảng biến thiên để khảo sát tính đơn điệu và cực trị.*

I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1 Nhắc lại định nghĩa tính đơn điệu của hàm số

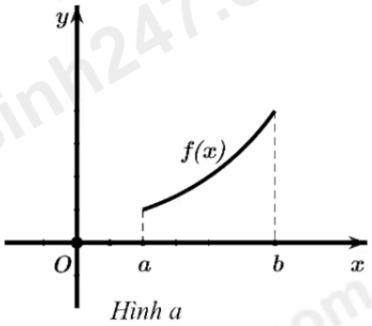
Hàm số $f(x)$ được gọi là đồng biến trên $(a;b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a;b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a;b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

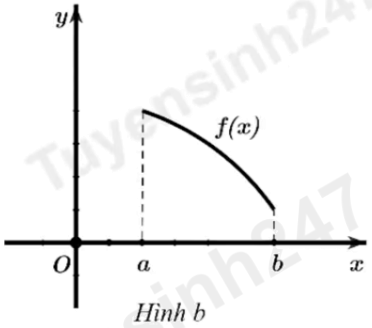
Về mặt đồ thị, khi xét từ trái sang phải:

+ Hàm số đồng biến trên $(a;b)$ có đồ thị là một đường đi lên trên $(a;b)$ (hình a).

+ Hàm số nghịch biến trên $(a;b)$ có đồ thị là một đường đi xuống trên $(a;b)$ (hình b).



Hình a



Hình b

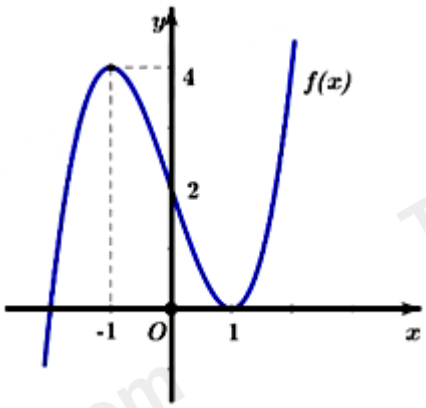
Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.



Cách giải:

Dựa vào đồ thị hàm số ta có

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

Chọn C.

2 Mối quan hệ giữa tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên K (K có thể là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng).

+ Nếu $f'(x)\geq 0, \forall x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K.

+ Nếu $f'(x)\leq 0, \forall x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên K.

Ví dụ 2: [Đề minh họa kì thi ĐGNL chuyên biệt Đại học Sư phạm TP. HCM năm 2025] Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(-2;0)$.

Cách giải:

Ta có $y'\geq 0$ trên đoạn $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$

Chọn D.

Ví dụ 3: [Đề tham khảo kì thi HSA năm 2025 Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ với $f'(x)=x(x+1)^2(1-x)$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Cách giải:

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$ hoặc $x=-1$ (loại)

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$

Chọn B.

3 Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số

Để xét tính đơn điệu của hàm số, ta có thể làm theo các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các điểm vừa tìm được theo thứ tự tăng dần và ***lập bảng biến thiên.***

Bước 4: Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

+ Các khoảng mà $f'(x)>0$ là các khoảng đồng biến của hàm số.

+ Các khoảng mà $f'(x)<0$ là các khoảng nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 3: Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Cách giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=x^2-2x-3$

$y'=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$

Chọn B.

Ví dụ 4: [Đề chính thức đợt 1 V - ACT năm 2025] Cho hàm số $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;-1),(-1;+\infty)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-1),(-1;+\infty)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

Cách giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}>0,\forall x\in D$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên từng khoảng xác định $(-\infty;-1),(-1;+\infty)$

Chọn C.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)=\frac{x^2+x+4}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;-1),(-1;+\infty)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng $(-3;-1),(1;+\infty)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-3),(1;+\infty)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên từng khoảng $(-3;-1),(-1;1)$.

Cách giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-3),(1;+\infty)$.

Chọn C.

Ví dụ 6: Hàm số $y=\dfrac{7^x+3}{\sqrt{49^x+1}}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;-3)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-3;-1)$.

Cách giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$$y'=\frac{7^x\cdot\ln 7\cdot\sqrt{49^x+1}-\left(7^x+3\right)\cdot\dfrac{49^x\cdot\ln 49}{2\sqrt{49^x+1}}}{49^x+1}$$

$$y'=0\Rightarrow\frac{7^x\cdot\ln 7\cdot\left(49^x+1\right)-\left(7^x+3\right)\cdot 49^x\cdot\ln 7}{\sqrt{49^x+1}}=0$$

$$\Rightarrow 7^x\ln 7-3\cdot 49^x\cdot\ln 7=0$$

$$\Rightarrow 7^x\cdot\ln 7\left(1-3\cdot 7^x\right)=0$$

$$\Rightarrow 1-3\cdot 7^x=0$$

$$\Rightarrow 7^x=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\log_7\frac{1}{3}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\log_7\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Hàm số $y=\dfrac{7^x+3}{\sqrt{49^x+1}}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\log_7\dfrac{1}{3};+\infty\right)$

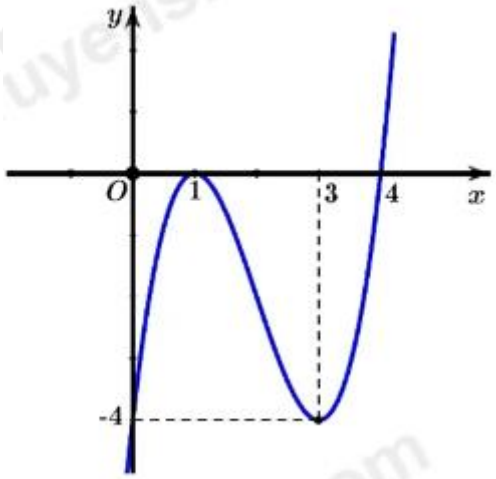
$\Rightarrow$Hàm số cũng nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Chọn C.

Ví dụ 8: [Đề tham khảo kì thi HSA năm 2025]

Cho hàm số bậc bốn $f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.

Hàm số $g(x)=f(x)+4x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;-3)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-3;-2)$.

Cách giải:

$g'(x)=f'(x)+4$

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$

Với $x\in(-\infty;0)\Rightarrow f'(x)<-4\Rightarrow f'(x)+4<0$

$x\in(-0;3)\Rightarrow f'(x)>-4\Rightarrow f'(x)+4>0$

$x\in(3;+\infty)\Rightarrow f'(x)>-4\Rightarrow f'(x)+4>0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ $\Rightarrow$hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(0;1)$

Chọn A.

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

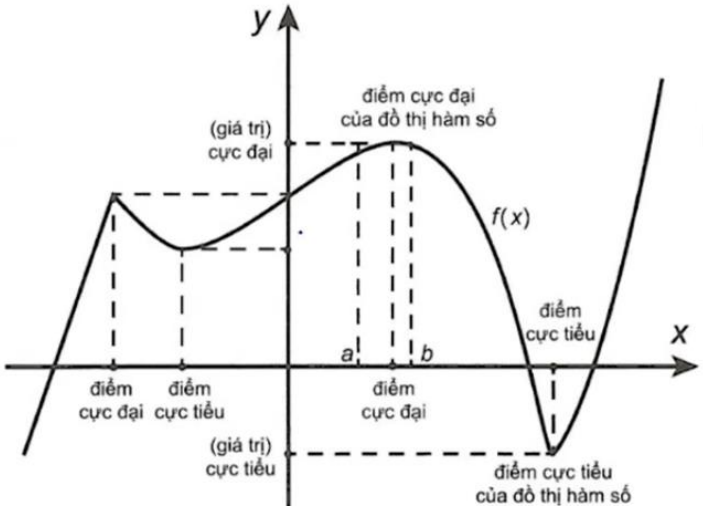
1 Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập $D(D\subset\mathbb{R})$ và $x_0\in D$.

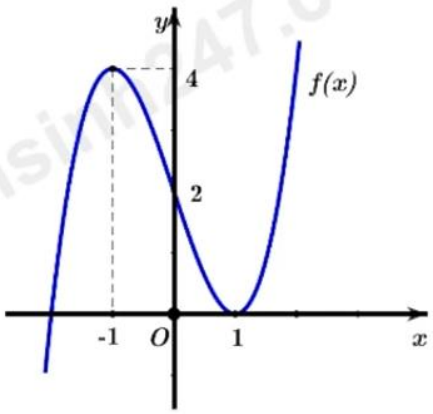
+ x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b)\subset D$ và $f(x_0)>f(x),\forall x\in(a;b)\setminus\{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$, kí hiệu y_{CD}.

+ x_0 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b)\subset D$ và $f(x_0)<f(x),\forall x\in(a;b)\setminus\{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$, kí hiệu y_{CT}.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.



Ví dụ 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực trị tại $x=0$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x=4$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Điểm cực tiểu của hàm số là $(0;1)$.

Cách giải:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

Chọn C.

Ví dụ 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ là

A. 2. **B.** -2. **C.** 1. **D.** $(1;-2)$.

Cách giải:

Điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ là $x=1$

Chọn C.

2 Định lí

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$.

Khi đó:

+ Nếu $f'(x_0)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0.

x	a		x_0		b
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	f(a)	↘	$f(x_0)$	↗	f(b)

+ Nếu $f'(x_0)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_0 thì hàm số đạt cực đại tại x_0.

x	a		x_0		b
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	f(a)	↗	$f(x_0)$	↘	f(b)

Ví dụ 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)=-\left(x^2+2x+1\right)(x-2)^2\left(x^2-2x-3\right)(x+4)$

Số điểm cực đại của hàm số $f(x)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Cách giải:

$$f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x+1=0\\(x-2)^2=0\\x^2-2x-3=0\\x+4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\ \text{(L)}\\x=2\ \text{(L)}\\x=-1\ \text{(N)};\ x=3\ \text{(N)}\\x=-4\ \text{(N)}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↘	

Hàm số đạt cực đại tại $x=4$ và $x=-3$

Số điểm cực đại của hàm số là: 2

Chọn C.

3 Quy tắc tìm cực trị của hàm số

Để tìm cực trị của hàm số $y=f(x)$, ta có thể thực hiện theo quy tắc sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các điểm vừa tìm được theo thứ tự tăng dần và ***lập bảng biến thiên.***

Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các điểm cực trị của hàm số.

Ví dụ 12: Số điểm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Cách giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$y'=\dfrac{-3}{(2x-1)^2}<0,\ \forall x\in D$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y		↘	‖	↘	

Hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$ là hàm nhất biến, không có cực trị.

Chọn A.

Ví dụ 13: Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-7}{x-4}$ là

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Cách giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

$y'=\dfrac{x^2-8x+15}{(x-4)^2}$

$y'=0\Rightarrow x^2-8x+15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=5\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		3		4		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
y		↗		↘	|	↘		↗	

Điểm cực đại của đồ thị hàm số: $A(3\,;\,4)$

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số: $B(5\,;\,8)$

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là: $AB=\sqrt{(5-3)^2+(8-4)^2}=2\sqrt{5}$

Chọn B.

Ví dụ 14: [Đề chính thức đợt 2 V-ACT năm 2025] Cho hàm số $f(x)=x^3-9x^2+24x+3$. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị là M và N. Tọa độ trung điểm I của MN là

A. $(1;25)$. **B.** $(2;23)$. **C.** $(3;21)$. **D.** $(4;19)$.

Cách giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2-18x+24$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	23	↘	19	↗	

Điểm cực đại $M(2;23)$

Điểm cực tiểu $N(4;19)$

Tọa độ trung điểm I của MN là $I(3;21)$

Chọn C.

Ví dụ 15: Số điểm cực tiểu của hàm số $f(x)=x-3\sqrt{x-3}+1$ là

A. 1 . **B.** 2 . **C.** 0 . **D.** 3 .

Cách giải:

Tập xác định $D=[3;+\infty)$

$f'(x)=1-\dfrac{3}{2\cdot\sqrt{x-3}}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{3}{2\sqrt{x-3}}=1$

$\Leftrightarrow 3=2\sqrt{x-3}$

$\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}=\sqrt{x-3}$

$\Leftrightarrow\dfrac{9}{4}=x-3$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{21}{4}$

Bảng biến thiên

x	3	$\dfrac{21}{4}$	7	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘		↗	

Hàm số có 1 điểm cực tiểu tại $x=\dfrac{21}{4}$.

Chọn A.

Ví dụ 16: Tổng giá trị tất cả các cực đại và cực tiểu của hàm số $y=2\sin x+\cos 2x$ trên đoạn $[0;2\pi]$ là

A. $\dfrac{11}{2}$. **B.** 1 . **C.** -7 . **D.** 5 .

Cách giải:

$y'=2\cos x-2\sin 2x$

$y'=0\Leftrightarrow 2(\cos x-\sin 2x)=0$

$\Leftrightarrow\cos x-2\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow\cos x\cdot(1-2\sin x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}\\x=\dfrac{3\pi}{2}\end{array}\right.\\\sin x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}\\x=\dfrac{5\pi}{6}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{3}{2}$	↘	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3	↗	

Tổng giá trị tất cả các cực đại và cực tiểu của hàm số là: $\frac{3}{2}+1+\frac{3}{2}+(-3)=1$

Chọn B.