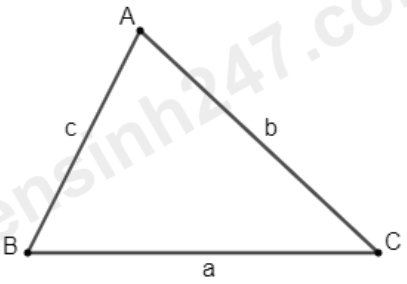
BÀI GIẢNG: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC (TIẾT 1)
CHUYÊN ĐỀ: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC
MÔN: TOÁN 10
GIÁO VIÊN: NGUYỄN ĐỨC HIỆP

MỤC TIÊU

- ✓ *Hiểu định lí côsin, định lí sin, công thức tính diện tích tam giác.*
- ✓ *Giải tam giác và giải quyết một số bài toán trong đo đạc.*

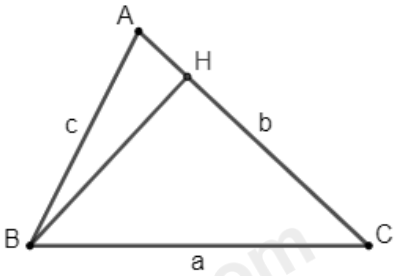
I. ĐỊNH LÍ CÔSIN

Ghi nhớ: Đối với ΔABC, ta kí hiệu:



- A, B, C là các góc tại đỉnh tương ứng;
- a, b, c tương ứng là độ dài của các cạnh đối diện với đỉnh A, B, C;
- $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác;
- S là diện tích;
- R, r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.

Tính a theo b, c và cosA:



+) Kẻ $BH \perp AC$ tại H.

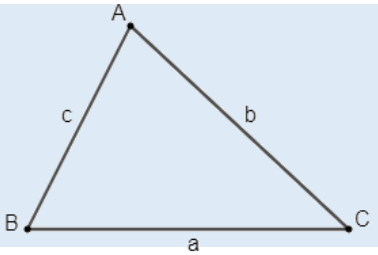
+) Có ΔAHB vuông tại H suy ra $\cos A = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB.\cos A$

+) Có ΔBHC vuông tại H suy ra:

$$\begin{aligned} BC^2 &= HB^2 + HC^2 \\ &= AB^2 - AH^2 + (AC - AH)^2 \\ &= AB^2 - AH^2 + AC^2 - 2AC.AH + AH^2 \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AC.AB.\cos A \end{aligned}$$

Suy ra $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

Định lí côsin: Trong ΔABC với $BC = a,\ AC = b,\ AB = c$, ta có:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

Nhận xét: Định lí Pythagore là một trường hợp đặc biệt của định lí côsin khi $A = 90^o$.

Ví dụ 1: Cho ΔABC có $A = 60^o$ và AB = 5, AC = 8. Tính BC.

Cách giải:

Theo định lí côsin, có

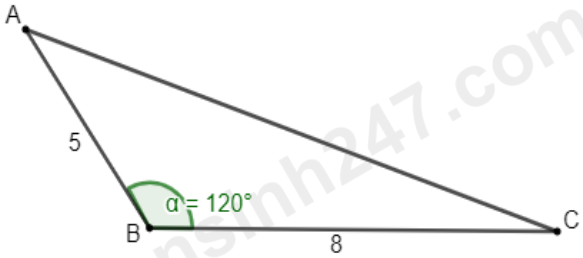
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$$
$$= 5^2 + 8^2 - 2.5.8.\cos 60^o$$
$$= 49$$

Vậy BC = 7.

Hệ quả: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có BA = 5, BC = 8 và $B = 120^o$. Tính độ dài các cạnh và độ lớn các góc còn lại của tam giác.

Cách giải:



Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC có:

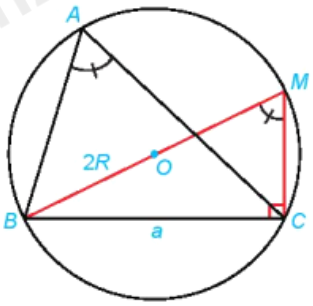
$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \cdot BA \cdot BC \cdot \cos B$$
$$= 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 129$$

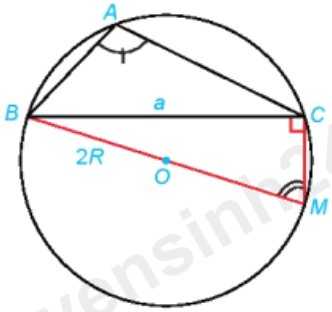
Suy ra $AC = \sqrt{129}$.

Theo hệ quả của định lí côsin, có: $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{3\sqrt{129}}{43}$

$\Rightarrow B \approx 37,6^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - A - B \approx 22,4^\circ$.

II. ĐỊNH LÍ SIN





Tính R theo a và sinA

a) $A < 90^o$: $\sin BMC = \frac{BC}{BM} = \frac{a}{2R}$

Trong (O), có $BAC = BMC = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \sin BMC = \frac{a}{2R} \Rightarrow R = \frac{a}{2 \cdot \sin A}$

b) $A > 90^o$: $\sin BMC = \frac{BC}{BM} = \frac{a}{2R}$

Vì $BMC + BAC = 180^\circ \Rightarrow \sin BMC = \sin BAC \Rightarrow \sin BAC = \frac{a}{2R} \Rightarrow R = \frac{a}{2 \cdot \sin A}$

Định lí sin: Trong ΔABC với $BC = a,\ AC = b,\ AB = c$, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác)

Hệ quả: $a = 2R.\sin A;\ b = 2R.\sin B;\ c = 2R.\sin C.$

Ví dụ 3: Tính số đo các góc, độ dài các cạnh còn lại và bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, biết:

a) $A = 135^\circ$, $C = 15^\circ$ và $b = 12$.

b) a = 9, c = 7 và $A = 135^\circ$.

Cách giải:

a) Có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 120^\circ + \hat{B} + 15^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$

Xét $\triangle ABC$ có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\sin 120^\circ} = \frac{8}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 15^\circ} = 2R$

Suy ra $a = \frac{8.\sin 120^o}{\sin 45^o} = 4\sqrt{6}$; $c = \frac{8.\sin 15^o}{\sin 45^o} = -4 + 4\sqrt{3}$; $R = \frac{8}{2.\sin 45^o} = 4\sqrt{2}$.

b) Xét $\triangle ABC$ có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{9}{\sin 135^\circ} = \frac{b}{\sin B} = \frac{7}{\sin C} = 2R$

Suy ra $R = \frac{9}{2.\sin 135^o} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

$\sin C = \frac{7\sin 135^o}{9} = \frac{7\sqrt{2}}{18} \Rightarrow C \approx 33,4^o \Rightarrow B = 180^o - 135^o - 33,4^o \approx 11,6 \Rightarrow b = \frac{9.\sin 11,6^o}{\sin 135^o} \approx 2,56.$

II. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

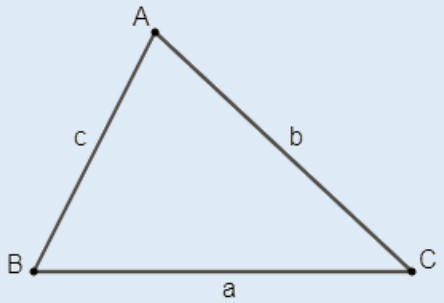
$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$

$= \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B$

$= \frac{abc}{4R}$ (R: bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác)

= p.r , r: bán kính đường tròn nội tiếp tam giác, $p = \frac{a+b+c}{2}$

$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Công thức Heron).



Ví dụ 4: Tính diện tích S của tam giác ABC, biết:

a) a = 6, b = 7 và $C = 150^o$

b) a = 5, b = 7, c = 8.

Cách giải:

a) $S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin C=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot \sin 150^{\circ}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot \frac{1}{2}=\frac{21}{2}$ (đvdt)

b) Có $p=\frac{a+b+c}{2}=10\Rightarrow S=\sqrt{10\cdot(10-5)\cdot(10-7)\cdot(10-t)}=\sqrt{10\cdot 5\cdot 3\cdot 2}=10\sqrt{3}$ (đvdt)

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC, có $A=45^{\circ}$, $B=60^{\circ}$, $c=8$

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán kinh đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác.

c) Tính độ dài đường cao h_a.

Cách giải:

a) Có $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^{\circ}\Rightarrow C=180^{\circ}-45^{\circ}-60^{\circ}\Rightarrow C=75^{\circ}$

$\Rightarrow \triangle ABC$ có : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

$\Rightarrow \frac{a}{\sin 45^{\circ}}=\frac{b}{\sin 60^{\circ}}=\frac{8}{\sin 75^{\circ}}=2R$

$\Rightarrow a=\frac{8\sin 45^{\circ}}{\sin 75^{\circ}}=-8+8\sqrt{3}$; $b=\frac{8\sin 60^{\circ}}{\sin 75^{\circ}}=-4\sqrt{6}+12\sqrt{2}$; $R=\frac{8}{2\sin 75^{\circ}}=4\sqrt{6}-4\sqrt{2}$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}b.c.\sin A=\frac{1}{2}\cdot(-4\sqrt{6}+12\sqrt{2}).8.\frac{\sqrt{2}}{2}=48-16\sqrt{3}$ (đvdt).

b) $R=\frac{8}{2\sin 75^{\circ}}=4\sqrt{6}-4\sqrt{2}$

Có $S=p.r\Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{48-16\sqrt{3}}{\frac{-8+8\sqrt{3}-4\sqrt{6}+12\sqrt{2}+8}{2}}\approx 1,93$

c) Có $S=\frac{1}{2}.a.h_a\Rightarrow h_a=\frac{2\cdot S_{\Delta}}{a}=\frac{96-32\sqrt{3}}{-8+8\sqrt{3}}=4\sqrt{3}.$