BÀI GIẢNG: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ VÀ HÀM SỐ
CHUYÊN ĐỀ: GIỚI HẠN – HÀM SỐ LIÊN TỤC
MÔN: TOÁN 11
GIÁO VIÊN: NGÔ HỒNG QUÂN

MỤC TIÊU

- ✓ *Hiểu được khái nhiệm giới hạn của dãy số, giới hạn hàm số.*
- ✓ *Tính giới hạn của dãy số, giới hạn hàm số.*

I. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \text{ hoặc } u_n \to 0 \text{ khi } n \to +\infty.$$

Ví dụ: Dãy số (u_n), $u_n = \frac{1}{n}$ có: $u_1 = 1;\ u_{10} = \frac{1}{10} = 0,1;\ u_{100} = \frac{1}{100} = 0,01;...$

Kí hiệu: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$

Dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$, kí hiệu

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \text{ hoặc } u_n \to a \text{ khi } n \to +\infty.$$

Ví dụ: Dãy số (u_n), $u_n = \frac{1}{n} + 1$ có: $u_n \to a$ thì $u_n - a \to 0$.

Suy ra $\frac{1}{n} + 1 - a \to 0$, mà $\frac{1}{n} \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Để $\frac{1}{n} + 1 - a \to 0$ thì $1 - a \to 0$ khi $n \to +\infty \Rightarrow a = 1$.

Vậy $u_n = \frac{1}{n} + 1 \to 1$ khi $n \to +\infty$.

Dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \text{ hay } u_n \to +\infty \text{ khi } n \to +\infty.$$

Dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$, kí hiệu:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \text{ hay } u_n \to -\infty \text{ khi } n \to +\infty.$$

Ví dụ:

+) Dãy số $(u_n): u_n = n^2$ có $u_1 = 1; u_{10} = 100; u_{100} = 10000; ...$

Có $u_n = n^2 \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

+) Dãy số $(u_n): u_n = -n^2$ có $\lim\limits_{n\to\infty}(-u_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(n^2) = +\infty$

Suy ra $u_n = -n^2 \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Quy tắc tính giới hạn hữu hạn:

Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$ thì

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = a + b; \qquad \lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = a - b;$$

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n \cdot v_n) = a \cdot b; \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \text{ nếu } b \neq 0.$$

Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

Quy tắc tính giới hạn vô cùng:

Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$) thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = 0$.

Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a, \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ và $v_n \neq 0$ với mọi n thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = \infty$.

Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a \neq 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \infty$.

Một số giới hạn cần nhớ:

$$\lim_{n\to\infty}(n^k) = \infty \ (k > 0); \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^k}\right) = 0 \ \ (k > 0)$$

$$\lim_{n\to\infty}(q^n) = \begin{cases} 0 & (|q| < 1) \\ +\infty & (q > 1) \end{cases}, \qquad \nexists \lim_{n\to\infty}(q^n) \text{ khi } q < -1$$

$$\nexists \lim_{n\to+\infty}[\sin(n)] \text{ và } \lim_{n\to\infty}[\cos(n)].$$

Ví dụ: Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào có giới hạn bằng 0?

A. $u_n = \frac{n^2 - 2}{5n + 3n^2}$ **B.** $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 3n^2}$ **C.** $u_n = \frac{1 - 2n}{5n + 3n^2}$ **D.** $u_n = \frac{n^2 - 2n^3}{5n + 3n^2}$

Cách giải:

A. $u_n = \frac{n^2 - 2}{5n + 3n^2} = \frac{n^2}{5n + 3n^2} - \frac{2}{5n + 3n^2}$.

Ta có khi $n \to +\infty$ thì $5n + 3n^2 \to +\infty$ suy ra $\frac{2}{5n + 3n^2} \to 0$.

Ta có $\frac{n^2}{5n+3n^2}=\frac{1}{\frac{5}{n}+3}$, mà $\frac{5}{n}\to 0$ nên $\frac{1}{\frac{5}{n}+3}\to\frac{1}{3}$ khi $n\to+\infty$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2}{5n+3n^2}=\frac{1}{3}$.

Ví dụ: Xét cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu u_1 và công bội q $(|q|<1)$. Khi đó, tổng tất cả các số hạng của cấp số nhân bằng ☐.

Cách giải:

Ta có tổng của n số hạng đầu: $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$

Vì $|q|<1$ nên $q^n\to 0$ khi $n\to+\infty$. Do đó, ta có

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{u_1}{1-q}-\left(\frac{u_1}{1-q}\right)q^n\right]=\frac{u_1}{1-q}.$$

Cấp số trên được gọi là **cấp số nhân lùi vô hạn** và tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) là:

$$S=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\frac{u_1}{1-q}\quad(|q|<1).$$

Ví dụ: Cấp số nhân $1;\frac{-1}{2};\frac{1}{4};\frac{-1}{8};\ldots$ có tổng $S=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$.

II. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1 Giới hạn của hàm số tại một điểm

Hàm số $f(x)$ xác định trên $(a;b)$ chứa x_0 có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in(a;b)$, $x_n\neq x_0$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L \text{ hay } f(x)\to L \text{ khi } x\to x_0.$$

2 Giới hạn một bên của hàm số

Về cơ bản, ta định nghĩa giống như giới hạn của hàm số tại một điểm.

Điểm khác biệt:

- Giới hạn trái: $a<x_n<x_0$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

- Giới hạn phải: $x_0<x_n<b$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$.

3 Giới hạn của hàm số tại vô cực

Về cơ bản, ta định nghĩa giống như giơi hạn của hàm số tại một điểm.

Điểm khác biệt: $x_n \to \pm\infty,\ f(x_n) \to L$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Quy tắc tính giới hạn:

Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ thì

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)\pm g(x)] = L \pm M; \quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot M$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}\ (M\neq 0); \quad \lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}\ (L\geq 0)$$

Lưu ý: a có thể là hữu hạn, vô cực, a^+, a^-.

$(+\infty)+(+\infty): +\infty$	
$(-\infty)-(+\infty): -\infty$	
$\infty.\infty: \infty$	$L.\infty: \infty\ (L\neq 0)$
$\frac{L}{\infty}: 0$	$\frac{L}{0}: \infty\ (L\neq 0)$

Một số giới hạn cần nhớ:

$$\lim_{k\to+\infty}(x^k) = +\infty (k\in\mathbb{Z}^+); \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^k}\right) = 0\ (k>0)$$

$$\lim_{k\to\infty}(x^k) = +\infty\ (k\vdots 2); \quad \lim_{k\to-\infty}(x^k) = -\infty\ (k\nmid 2).$$

III. GIỚI HẠN DẠNG VÔ ĐỊNH

1 Dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Cách làm: Chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa có bậc cao nhất.

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}$ (chia cả tử và mẫu cho x^2 và áp dụng quy tắc tính giới hạn).

2 Dạng $\frac{0}{0}$

Cách làm: Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn.

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}.$

3 Dạng $\infty-\infty$

Cách làm: Sử dụng biểu thức liên hợp và hằng đẳng thức.

Ví dụ: Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)$

Ta có:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n^2+4n}{n+\sqrt{n^2-4n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n}{n+\sqrt{n^2-4n}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{1+\sqrt{\dfrac{n^2-4n}{n^2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\dfrac{4}{n}}}=\frac{4}{1+\sqrt{1}}=2.$$

Ví dụ: Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào có giới hạn bằng 0?

A. $u_n=\dfrac{n^2-2}{5n+3n^2}$ **B.** $u_n=\dfrac{n^2-2n}{5n+3n^2}$ **C.** $u_n=\dfrac{1-2n}{5n+3n^2}$ **D.** $u_n=\dfrac{n^2-2n^3}{5n+3n^2}$

Cách giải:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2}{5n+3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{5}{n}+3}=\frac{1}{3};\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{5n+3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{2}{n}}{\dfrac{5}{n}+3}=\frac{1}{3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-2n}{5n+3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{2}{n}}{\dfrac{5}{n}+3}=0;\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n^3}{5n+3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}-2}{\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{3}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{0}=-\infty.$$

Đáp án: C.

IV. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY

1 Giới hạn của dãy số: Xét $n\to+\infty$

- Bước 1: Nhập dãy số vào máy tính. Ví dụ: $u_n=3n-\sqrt{9n^2-4n}\Rightarrow$ Nhập: $3x-\sqrt{9x^2-4x}$
- Bước 2: Nhấn nút CALC, nhập giá trị $x=10^{10}$.
- Bước 3: Nhấn nút "=" và đọc kết quả.

2 Giới hạn của hàm số: Xét $x\to+\infty$

- Bước 1: Nhập hàm số vào máy tính.
- Bước 2: Nhấn nút CALC, nhập giá trị $x=10^{10}$.
- Bước 3: Nhấn nút "=" và đọc kết quả.

Lưu ý: Ta xét tương tự cho trường hợp $x \to -\infty,$ khi đó ta thay $x = -10^{10}$

3 Giới hạn của hàm số: Xét $x \to a$

Trường hợp 1: Hàm số xác định tại $x = a$:

- Bước 1: Nhập hàm số vào máy tính.

- Bước 2: Nhấn nút CALC, nhập giá trị $x = a$.

- Bước 3: Nhấn nút "=" và đọc kết quả.

Trường hợp 2: Hàm số không xác định tại $x = a$:

Khi đó, ta bắt buộc phải tính các giới hạn trái và giới hạn phải.

- Nếu $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

- Nếu $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ thì $\nexists \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

4 Giới hạn của hàm số: Xét $x \to a^-$

- Bước 1: Nhập hàm số vào máy tính.

- Bước 2: Nhấn nút CALC, nhập giá trị $x = a - 10^{-10}$.

- Bước 3: Nhấn nút "=" và đọc kết quả.

5 Giới hạn của hàm số: Xét $x \to a^+$

- Bước 1: Nhập hàm số vào máy tính.

- Bước 2: Nhấn nút CALC, nhập giá trị $x = a + 10^{-10}$.

- Bước 3: Nhấn nút "=" và đọc kết quả.

6 Cách đọc kết quả: Xét các dạng của kết quả:

- Dạng 1: Một số rất lớn (VD: $10^{10}, 3.10^{11}, \ldots$) là $+\infty$.

- Dạng 2: Một số rất nhỏ (VD: -5×10^{12}) là $-\infty$.

- Dạng 3: Số có dạng $k.10^{-n}$ là 0..

- Dang 4: Một số thập phân: Dự đoán số đó gần số thực nào nhất, sau đó bấm máy để kiểm tra.

V. BÀI TOÁN VẬN DỤNG

Câu 1: Giới hạn của dãy (u_n), với $u_n = \dfrac{4n^2 + 3n + 1}{(3n-1)^2}$ là

A. $\dfrac{4}{3}$ **B.** $\dfrac{4}{9}$. **C.** 0. **D.** 4.

Cách giải:

Ta có: $\lim u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4n^2 + 3n + 1}{(3n-1)^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4n^2 + 3n + 1}{9n^2 - 6n + 1} = \dfrac{4}{9}.$

Đáp án: B.

Câu 2: Giới hạn của (u_n), với $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$ là

A. 1 **B.** $+\infty$ **C.** 0 **D.** $\frac{1}{2}$.

Cách giải:

Ta có $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2} = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \frac{\frac{n}{2}(1+n)}{n^2}$

Suy ra $\lim u_n = \lim\left(\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}\right) = \lim \frac{\frac{n}{2}(1+n)}{n^2} = \frac{1}{2}.\lim \frac{n^2+n}{n^2} = \frac{1}{2}.$

Đáp án: D.

Câu 3: Tổng vô hạn $S = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^n} + \ldots$ bằng

A. 2 **B.** $\frac{8}{3}$ **C.** 3 **D.** $\frac{3}{2}$.

Cách giải:

Ta có S là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 2; q = \frac{1}{3} \in (-1;1)$

Suy ra $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3.$

Đáp án: C.

Câu 4: Biết $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5-x^2}}{\sqrt{x^2+16}-4} = \frac{a}{\sqrt{b}}, a \in \mathbb{Z}, b$ là số nguyên tố, khi đó $a+2b$ bằng ☐.

Cách giải:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5-x^2}}{\sqrt{x^2+16}-4} = \lim\left(\frac{x^2}{\sqrt{5}+\sqrt{5-x^2}} : \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}+4}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{5}+\sqrt{5-x^2}} = \frac{4+4}{\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Vậy $a+2b = 4+2.5 = 14.$

Đáp án: 14.