BÀI GIẢNG: DÃY SỐ
CHUYÊN ĐỀ: DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN
MÔN: TOÁN 11
GIÁO VIÊN: NGÔ HỒNG QUÂN

MỤC TIÊU

- ✓ *Nhận biết dãy số hữu hạn, dãy số vô hạn.*
- ✓ *Thể hiện cách cho dãy số bằng liệt kê các số hạng; bằng công thức tổng quát; bằng hệ thức truy hồi; bằng cách mô tả.*
- ✓ *Nhận biết tính chất tăng, giảm, bị chặn của dãy số trong những trường hợp đơn giản.*

I. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ

Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương được gọi là một **dãy số vô hạn** (gọi tắt là dãy số), kí hiệu $u = u(n)$.

Thực tế, ta kí hiệu $(u_n): u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

Số u_1: **số hạng đầu**, u_n: **số hạng tổng quát.**

II. CÁCH CHO DÃY SỐ

1. Liệt kê các số hạng

Ví dụ: Cho dãy số (u_n) như sau: $u_1 = 1,\ u_2 - 3,\ u_3 = 6,\ u_4 = 10,\ u_5 = 15.$

Cách liệt kê các số hạng của dãy số chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng.

2. Công thức của số hạng tổng quát

Ví dụ: Cho dãy số $(u_n): u_n = \frac{1}{n^2}$.

Khi đó $u_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; $u_4 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$; $u_{100} = \frac{1}{100^2} = \frac{1}{10000}$.

3. Phương pháp mô tả

Ví dụ: Dãy số hữu hạn gồm các số tự nhiên chia hết cho 3 và nhỏ hơn 20.

Ta được các số hạng: $u_1 = 0, u_2 = 3, u_3 = 6, u_4 = 9, u_5 = 12, u_6 = 15, u_7 = 18.$

Suy ra công thức số hạng tổng quát: $\begin{cases} u_n = 3(n-1) \\ 1 \le n \le 7 \end{cases}$.

4. Phương pháp truy hồi

Hệ thức truy hồi là hệ thức biểu thị số hạng thứ n của dãy số qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

Ví dụ: Dãy Fibonacci: $u_1=1,u_2=1,u_3=2,u_4=3,u_5=5,u_6=8,...$

Hệ thức truy hồi của dãy Fibonacci: $\begin{cases}u_1=1,u_2=1\\u_n=u_{n-1}+u_{n-2}\left(n\geq 3\right)\end{cases}$

III. DÃY SỐ TĂNG, GIẢM, BỊ CHẶN

1. Dãy số tăng, dãy số giảm

Dãy số được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1}>u_n\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Ví dụ: Dãy $\left(u_n\right):u_n=2^n$ là dãy số tăng.

Chứng minh:

Có $u_{n+1}=2^{n+1},\ u_n=2^n$

+) Cách 1: Xét $u_{n+1}-u_n=2^{n+1}-2^n=2^n>0$ suy ra $u_{n+1}>u_n$.

+) Cách 2: Xét $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}=2>1$ suy ra $u_{n+1}>u_n$.

Dãy số được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1}<u_n\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Ví dụ: Dãy $\left(u_n\right):u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ là dãy số giảm.

Chứng minh:

Xét $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{2}{3}<1$ suy ra $u_{n+1}<u_n$.

Ví dụ: Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau:

a) $\left(u_n\right):u_n=5n+2$,

b) $\left(u_n\right):u_n=-2n+1$,

c) $\left(u_n\right):u_n=\frac{-2n+1}{n+3}$.

Cách giải:

a) Ta có: $u_n=5n+2;\ u_{n+1}=5\left(n+1\right)+2=5n+7$

Suy ra $u_{n+1}-u_n=\left(5n+7\right)-\left(5n+2\right)=5>0$

Vậy dãy số tăng.

b) Ta có: $u_n=-2n+1;\ u_{n+1}=-2\left(n+1\right)+1=-2n-1$

Suy ra $u_{n+1}-u_n=\left(-2n-1\right)-\left(-2n+1\right)=-2<0$

Vậy dãy số giảm.

c) Có $u_n=\frac{-2n+1}{n+3}$; $u_n=\frac{-2(n+1)+1}{(n+1)+3}=\frac{-2n-1}{n+4}$

Suy ra $u_{n+1}-u_n=\frac{-2n-1}{n+4}-\frac{-2n+1}{n+3}=\frac{-7}{(n+4)(n+3)}<0$

Vậy dãy số giảm.

2. Dãy số bị chặn

Dãy số được gọi là **bị chặn trên** nếu tồn tại một số M sao cho $u_n\le M\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ví dụ: Dãy $(u_n):u_n=-n^2+4n-5$ là dãy số bị chặn trên.

Chứng minh:

Có $u_n=-\left(n^2-4n+5\right)=-\left[(n-2)^2+1\right]=-(n-2)^2-1\le -1.$

Vậy dãy (u_n) bị chặn trên bởi -1.

Dãy số được gọi là **bị chặn dưới** nếu tồn tại một số m sao cho $m\le u_n\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ví dụ: Dãy $(u_n):u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ là dãy số bị chặn dưới.

Chứng minh:

Ta có $u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n>0$ suy ra dãy (u_n) bị chặn dưới.

Dãy số được gọi là **bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số $m,\ M$ sao cho

$$m\le u_n\le M\ ,\forall n\in\mathbb{N}^*$$

Ví dụ: Dãy $(u_n):u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ là dãy số bị chặn vì $0<u_n\le u_1=\frac{2}{3}$.

Ví dụ: Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $(u_n):u_n=5n+2$,

b) $(u_n):u_n=\frac{-2n+1}{n+3}$.

Cách giải:

a) Ta có (u_n) là dãy tăng $\Rightarrow u_1<u_2<...$ suy ra $u_1=7\le u_n$.

Vậy dãy số bị chặn dưới, không bị chặn trên $\Rightarrow$ Không bị chặn.

b) Ta có (u_n) là dãy giảm $\Rightarrow u_1>u_2>...$ suy ra $u_n\le u_1=\frac{-1}{4}$ (dãy số bị chặn trên)

Có $\frac{-2n+1}{n+3}=-2+\frac{7}{n+3}>-2$ suy ra $-2\le u_n$ (dãy số bị chặn dưới)

Suy ra $-2 \le u_n \le \dfrac{-1}{4}$

Vậy dãy số bị chặn.

IV. MỘT SỐ BÀI TOÁN VẬN DỤNG

Bài 1: Cho dãy $(u_n)_{n\ge 1}$ thỏa mãn $u_1 = 1$ và $u_{n+1} - u_n = 2n - 1$. Khi đó, giá trị của u_5 là _____

Cách giải:

Có $u_2 - u_1 = 1 \Rightarrow u_2 = 1 + 1 = 2$, $u_3 - u_2 = 3 \Rightarrow u_3 = 3 + 2 = 5$,

$u_4 - u_3 = 5 \Rightarrow u_4 = 5 + 5 = 10$, $u_5 - u_4 = 7 \Rightarrow u_5 = 7 + 10 = 17$.

Đáp án: 17.

Bài 2: Cho dãy $(u_n)_{n\ge 1}$ thỏa mãn $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Khi đó, tổng $u_1 + u_2 + ... + u_n$ bằng

A. $\dfrac{n-1}{n}$ **B.** $\dfrac{n+1}{n+2}$ **C.** $\dfrac{n+2}{n+3}$ **D.** $\dfrac{n}{n+1}$

Cách giải:

Ta có $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ suy ra:

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-1} + u_n$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Chọn D.

Bài 3: Cho dãy $(u_n)_{n\ge 1}$ thỏa mãn $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Khi đó, tích $u_1.u_2.....u_{n-1}$ bằng

A. $\dfrac{n-1}{2n}$ **B.** $\dfrac{n+1}{n+2}$ **C.** $\dfrac{n+1}{2n}$ **D.** $\dfrac{n+1}{n}$

Cách giải:

Ta có $u_n = \dfrac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \dfrac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

$u_1 = \dfrac{1.3}{2^2}$; $u_2 = \dfrac{2.4}{3^2}$; $u_3 = \dfrac{3.5}{4^2}$;...; $u_{n-2} = \dfrac{(n-2).n}{(n-1)^2}$; $u_{n-1} = \dfrac{(n-1).(n+1)}{n^2}$

Suy ra $u_1.u_2.....u_{n-1} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{n+1}{2n}$.

Chọn C.

Bài 4: Trong các dãy số cho dưới đây, dãy số không bị chặn trên là

A. $(u_n): u_n = \dfrac{n^2-1}{2n}$ **B.** $(u_n): u_n = \sin(n)$ **C.** $(u_n): u_n = \dfrac{n+1}{n+3}$ **D.** $(u_n): u_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

Cách giải:

Ta có $(u_n): u_n = \sin(n)$ và $(u_n): u_n = \dfrac{n+1}{n+3}$ là hai dãy số bị chặn trên bởi 1

Dãy số $(u_n): u_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ bị chặn trên bởi $\dfrac{1}{4}$.

Chọn A.

Bài 5: Cho các dãy số sau: $(u_n): u_n = 2n+1$, $(v_n): v_n = 2^n$. Biết rằng $p \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn với mọi $n \geq p$, số hạng của (v_n) có giá trị lớn hơn số hạng có cùng thứ tự của (u_n). Khi đó giá trị của p bằng ____

Cách giải:

Xét $2^n > 2n+1$, với:

+) $n=1$: VT = 2, VP = 3

+) $n=2$: VT = 4, VP = 5

+) $n=3$: VT = 8, VP = 7

+) $n=4$: VT = 16, VP = 9

Vậy giá trị thoả mãn là $n \geq 3$.

Đáp án: 3.

Bài 6: Xét $(u_n)_{n\geq 1}: u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$ và các mệnh đề sau:

I. Dãy (u_n) là dãy số giảm.

II. Dãy (u_n) bị chặn.

Số mệnh đề sai là _____

Cách giải:

$u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$; $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \ldots + \dfrac{1}{2n+2}$

Xét $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}$

$= \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$

Suy ra dãy số tăng => I sai.

Ta có $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}; \dfrac{1}{n+2} < \dfrac{1}{n}; \ldots; \dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{n}$

Suy ra $0<u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}<n.\frac{1}{n}=1$.

Vậy dãy (u_n) bị chặn => II đúng.

Đáp án: 1.