BÀI GIẢNG: NGUYÊN HÀM CƠ BẢN
CHUYÊN ĐỀ: NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG
MÔN: TOÁN 12
GIÁO VIÊN: ĐOÀN NGỌC DUY TRÌNH

MỤC TIÊU

- ✓ *Hiểu được khái niệm nguyên hàm của một hàm số.*
- ✓ *Nắm được quy tắc tìm nguyên hàm cơ bản và bảng nguyên hàm của các hàm số thông dụng.*
- ✓ *Biết được mối liên hệ giữa đạo hàm và nguyên hàm.*

I. NGUYÊN HÀM

1 Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là một khoảng, đoạn, hoặc nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in K$. Khi đó ta có:

• Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

• Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi x thuộc K.

• Mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x)+C, C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm (gọi tắt là họ nguyên hàm) của $f(x)$ trên K, kí hiệu là $\int f(x)dx$ và viết $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)=3x^2+2x$. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, hãy chọn đúng hoặc sai.

a) Hàm số $F(x)=x^3+2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

b) Họ nguyên hàm của $f(x)$ là $\int f(x)dx=x^3+x^2$.

c) Các hàm số $G(x)=x^3+x^2+1$ và $H(x)=x^3+x^2-2$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

d) $\int(6x+2)dx=f(x)+C$.

Cách giải:

a) $F'(x)=3x^2+4x\neq f(x)\Rightarrow F(x)$ không là nguyên hàm của hàm số $f(x)$

Vậy a) Sai

b) Ta có: $\left(x^3+x^2\right)'=3x^2+2x=f(x)$

$\Rightarrow$Họ nguyên hàm của $f(x)$ là $\int f(x)dx=x^3+x^2$

Vậy b) Đúng.

c) Họ nguyên hàm của $f(x)$ là $\int f(x)dx = x^3 + x^2$

$\Rightarrow$Các hàm số $G(x) = x^3 + x^2 + 1$ và $H(x) = x^3 + x^2 - 2$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Vậy c) Đúng

d) Ta có: $f'(x) = \left(3x^2 + 2x\right)' = 6x + 2$

$\Rightarrow \int (6x + 2)dx = f(x) + C$

Vậy d) Đúng

Chú ý:

a) Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

Bài toán tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ khoảng K thì được hiểu là tìm nguyên hàm trên từng khoảng xác định của hàm số đó.

b) Từ định nghĩa nguyên hàm, ta có $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

Ví dụ 2: [Đề chính thức kì thi Tốt nghiệp THPT năm 2025] Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ là

A. $\frac{1}{3}x^3 + C$. **B.** $2x^3 + C$. **C.** $3x^3 + C$. **D.** $\frac{1}{2}x^3 + C$.

Cách giải:

Xét phương án A. $\frac{1}{3}x^3 + C$

Ta có: $\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right)' = x^2 = f(x)$

Chọn A.

Ví dụ 3: [Đề minh họa kì thi ĐGNL chuyên biệt Đại học Sư phạm TP. HCM năm 2025] Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x}$?

A. $y = x^3 - 2\ln|x|$. **B.** $y = 6x - 2\ln|x|$. **C.** $y = x^3 + \frac{2}{x^2}$. **D.** $y = 6x + \frac{2}{x^2}$.

Cách giải:

Xét phương án A. $y = x^3 - 2\ln|x|$

Ta có: $y' = 3x^2 - \frac{2}{x} = f(x)$

Chọn A.

2 Bảng công thức nguyên hàm

STT	Loại hàm số	Công thức nguyên hàm
1	Hàm số lũy thừa	$\int 0dx = C$

		$\int 1dx = x + C$
		$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
2	Hàm số $y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C \quad (x \neq 0)$
3	Hàm số lượng giác	$\int \cos x = \sin x + C$
		$\int \sin x dx = -\cos x + C$
		$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
		$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
4	Hàm số mũ	$\int e^x dx = e^x + C$
		$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$

Ví dụ 4: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2\sqrt{x}$ là

A. $\frac{5}{2}x^3\sqrt{x} + C$. **B.** $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + C$. **C.** $\frac{1}{3}x^3\sqrt{x} + C$. **D.** $\frac{1}{2}x^3\sqrt{x} + C$.

Cách giải:

$f(x) = x^2\sqrt{x}$

$$\int f(x)dx = \int x^2\sqrt{x}dx = \int x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7} \cdot x^{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7} \cdot \sqrt{x^7} + C$$

$$= \frac{2}{7} \cdot x^3 \cdot \sqrt{x} + C$$

Chọn B.

Ví dụ 5: Tìm $\int e^{-0,5x}dx$.

A. $e^{-0,5x} + C$. **B.** $e^x + C$. **C.** $\frac{-e^{-0,5x}}{2} + C$. **D.** $-2e^{-0,5x} + C$.

Cách giải:

$$\int e^{-0,5x}dx = \int \left(e^{-0,5}\right)^x dx = \frac{\left(e^{-0,5}\right)^x}{\ln e^{-0,5}} + C = \frac{e^{-0,5x}}{-0,5} + C = -2 \cdot e^{-0,5x} + C$$

Chọn D.

Ví dụ 6: Tìm $\int \frac{1+\cot^2 x}{\cot^2 x}dx$.

A. $\cot x + C$. **B.** $\tan x + C$. **C.** $\cot^2 x + C$. **D.** $\tan^2 x + C$.

Cách giải:

$$\int \frac{1+\cot^2 x}{\cot^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cot^2 x}+1\right)dx = \int (\tan^2 x+1)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$$

Chọn B.

3 Tính chất

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên K. Khi đó:

a) $\int k f(x)dx = k\int f(x)dx$ (với mọi số thực k khác 0).

b) $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

$\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Ví dụ 7: Tìm $\int \left(2x+\frac{1}{x}\right)dx$ trên $(0;+\infty)$.

A. $2x^2 + \ln x + C$. **B.** $x^2 + \ln x + C$. **C.** $x^2 - \frac{1}{x^2} + C$. **D.** $2x^2 - \frac{1}{x^2} + C$.

Cách giải:

$$\int \left(2x+\frac{1}{x}\right)dx = \int 2xdx + \int \frac{1}{x}dx$$
$$= 2\cdot\int xdx + \int \frac{1}{x}dx$$
$$= 2\cdot\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$$
$$= x^2 + \ln x + C$$

Chọn B.

Ví dụ 8: Tìm $\int 3^x \cdot 2^{2x+1}dx$.

A. $\frac{3^x}{\ln 3} + C$. **B.** $2\cdot\frac{6^x}{\ln 6} + C$. **C.** $2\cdot\frac{12^x}{\ln 12} + C$. **D.** $\frac{6^x}{\ln 6} + C$.

Cách giải:

$$\int 3^x \cdot 2^{2x+1}dx = \int 3^x \cdot 2^{2x}\cdot 2dx$$
$$= 2\cdot\int 3^x \cdot 4^x dx$$
$$= 2\int 12^x dx$$
$$= 2\cdot\frac{12^x}{\ln+2} + C$$

Chọn C.

Ví dụ 9: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ là

A. $\tan x+x+C$. **B.** $\tan x-x+C$. **C.** $\tan 2x+C$. **D.** $\tan 2x+2x+C$.

Cách giải:

Ta có: $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

$\cos x=1-2\sin^2 x$

$\Rightarrow 1-\cos^2 x=2\sin^2 x$

$$\int\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}dx$$

$$=\int\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}dx$$

$$=\int\tan^2 x dx$$

$$=\int\left(\tan^2 x+1-1\right)dx$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int 1dx$$

$$=\tan x-x+C$$

Chọn B.

Ví dụ 10: [Đề minh họa kì thi ĐGNL chuyên biệt Đại học Sư phạm TP. HCM năm 2025] Cho các hàm số $F(x)=3x^2+1$ và $G(x)=4x^3+2x$ lần lượt là nguyên hàm của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$. Xét $H(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $h(x)=f(x)\cdot g(x)$. Phương án nào dưới đây là đúng?

A. $H(x)=\left(3x^2+1\right)\left(4x^3+2x\right)$. **B.** $H(x)=\left(x^3+x\right)\left(x^4+x^2\right)$.

C. $H(x)=6x\left(12x^2+2\right)$. **D.** $H(x)=6\left(x^2-1\right)\left(3x^2+4\right)$.

Cách giải:

Ta có $\begin{cases}f(x)=F'(x)\\g(x)=G'(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)=6x\\g(x)=12x^2+2\end{cases}$

$\Rightarrow h(x)=6x\cdot\left(12x^2+2\right)=72x^3+12x$

$\Rightarrow H(x)=\int\left(72x^3+12x\right)dx=72\cdot\dfrac{x^4}{4}+12\dfrac{x^2}{2}+C$

$=18x^4+6x^2+C$

Chọn D.

II. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1 Tìm nguyên hàm của hàm số dựa vào bảng công thức nguyên hàm, định nghĩa, tính chất

Ví dụ 11: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$ là

A. $x-\cos x+C$. **B.** $x+\cos x+C$. **C.** $x-\sin x+C$. **D.** $x+\sin x+C$.

Cách giải:

Ta có $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$

$=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

$=\int(1-\sin x)dx$

$=\int 1dx-\int\sin xdx$

$=x+\cos x+C$

Chọn B.

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$. Biết $f'(x)=e^{3x}+5x\sqrt{x}$. Hàm số $f(x)$ có dạng

A. $\frac{e^{3x}}{3}+2\sqrt{x^5}+C$. **B.** $e^{3x}+\sqrt{x^5}+C$. **C.** $\frac{e^{3x}}{3}+\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$. **D.** $e^{3x}+5\sqrt{x^5}+C$.

Cách giải:

Ta có $f(x)=\int\left(e^{3x}+5x\sqrt{x}\right)dx$

$=\int e^{3x}dx+\int 5x\sqrt{x}dx$

$=\int\left(e^3\right)^xdx+5\int x\cdot x^{\frac{1}{2}}dx$

$=\frac{\left(e^3\right)^x}{\ln e^3}+5\cdot\int x^{\frac{3}{2}}dx$

$=\frac{e^{3x}}{3}+5\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+C$

$=\frac{e^{3x}}{3}+2\cdot x^{\frac{5}{2}}+C$

$=\frac{e^{3x}}{3}+2x^2\cdot\sqrt{x}+C$

$=\frac{e^{3x}}{3}+2\sqrt{x^5}+C$

Chọn A.

Ví dụ 13: Tìm nguyên hàm $\int(\tan x+\cot x)^2dx$.

A. $\tan x+\cot x+C$. **B.** $\tan x-\cot x+C$. **C.** $-\tan x-\cot x+C$. **D.** $-\tan x+\cot x+C$.

Cách giải:

Ta có: $\int(\tan x+\cot x)^2dx$

$= \int \left(\tan^2 x + 2\tan x \cdot \cot x + \cot^2 x\right)dx$

$= \int (\tan^2 x + 1 - 1 + 2 + \cot^2 x + 1 - 1)dx$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}dx$

$= \tan x - \cot x + C$

Chọn B.

2 Nguyên hàm hàm ẩn

Ví dụ 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int xf'(x)dx = 2x^3 - 3x^2 + ax + C$, với a là tham số thực. Biết hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 1$ là 3. Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = -1$.

Cách giải:

Ta có: $\int xf'(x)dx = 2x^3 - 3x^2 + ax + C$

$\Rightarrow xf'(x) = 6x^2 - 6x + a \quad (*)$

Thay $x = 1$ vào (*) ta được:

$1 \cdot f'(1) = 6 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + a$

$\Leftrightarrow \quad 3 \quad = \quad a$

Thay $x = -1$ vào (*) ta được:

$(-1) \cdot f'(-1) = 6 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 3$

$\Leftrightarrow -f'(-1) = 15$

$\Leftrightarrow \quad f'(-1) = -15$

Vậy hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = -1$ là -15.

Đáp án: -15.

Ví dụ 15: Biết $F(x) = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(2x^3 + 9x^2 - 2x + 5\right) \cdot e^x$

Tính $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Cách giải:

$F(x) = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^x$

$F'(x) = f(x)$

$\Rightarrow \left(3ax^2 + 2bx + c\right)e^x + \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) \cdot e^x = \left(2x^3 + 9x^2 - 2x + 5\right)e^x$

$\Leftrightarrow \left[ax^3 + (3a + b)x + (2b + c)x + c + d\right)e^x = \left(2x^3 + 9x^2 - 2x + 5\right)e^x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 3a + b = 9 \Rightarrow b = 3 \\ 2b + c = -2 \Rightarrow c = -8 \\ d = 5 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 102$

Đáp án: 102.

Ví dụ 16: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{18}$ và $f'(x)=4x^3[f(x)]^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f(1)$.

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{10}$. **C.** $-\frac{41}{400}$. **D.** $\frac{-391}{400}$.

Cách giải:

$f'(x)=4x^3[f(x)]^2, \forall x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=4x^3\cdot[f(x)]^2$

$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}=4x^3$

$\Leftrightarrow \int\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}dx=\int -4x^3dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}=-4\cdot\frac{x^4}{4}+c$

$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}=-x^4+c \quad (*)$

Thay $x=2$ vào (*) ta được:

$\frac{1}{f(2)}=-2^4+c$

$\Leftrightarrow -18=-16+c$

$\Leftrightarrow c=-2$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)}=-x^4-2 \quad (**)$

Thay $x=1$ vào (**) ta được:

$\frac{1}{f(1)}=-1-2\Rightarrow f(1)=-\frac{1}{3}$

Chọn A.