BÀI GIẢNG: TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ

CHUYÊN ĐỀ: HÀM SỐ

MÔN TOÁN: LỚP 12

THẦY GIÁO: NGUYỄN CÔNG CHÍNH



A. LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP TÌM TIỆM CẬN

I. ĐIỀU KIỆN ĐỂ CÓ TIỆM CẬN

Đường cong $(C): y = f(x)$ chỉ có thể có tiệm cận

$\Leftrightarrow$ Miền xác định hoặc miền giá trị của hàm số $y = f(x)$ phải có chứa ∞.

$\Leftrightarrow$ Đường cong $(C)\,(C): y = f(x)$ phải có nhánh chạy ra vô tận.

+ Nếu $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-\gamma\right]=0$ thì $y=\gamma$ là tiệm cận.

+ Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ thì $x=a$ là tiệm cận.

II. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIỆM CẬN

+ Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=y_0$ thì $y=y_0$ là tiệm cận ngang.

+ Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ thì $x=x_0$ là tiệm cận đứng.

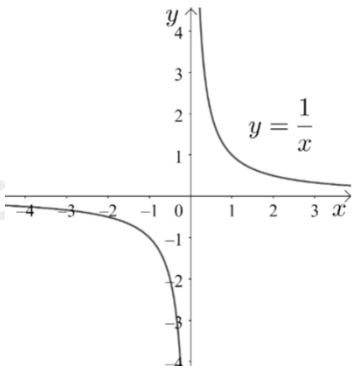
+ Hàm đa thức không có tiệm cận.

+ Hàm phân thức thường có tiệm cận.

+ Ngoài ra một số hàm lũy thừa, mũ và logarit cũng có tiệm cận.

III. PHƯƠNG PHÁP TÌM TIỆM CẬN

VD1.

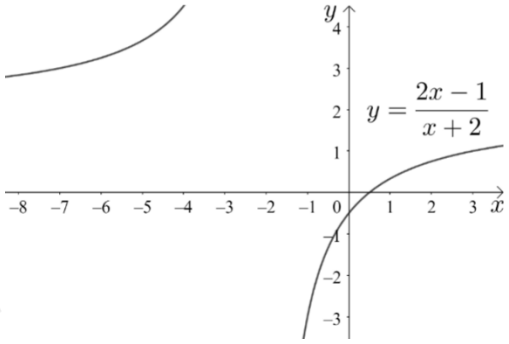


$y=\frac{1}{x}$. Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=0\\ \lim\limits_{x\to0^+} y=+\infty,\ \lim\limits_{x\to0^-} y=-\infty\end{cases}$

Vậy TCN: $y=0$ (trục Ox)

TCĐ: $x=0$ (trục Oy)

VD2.



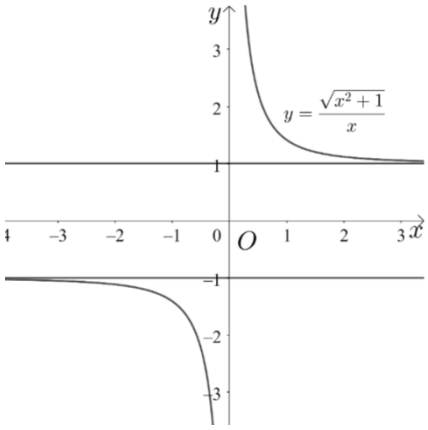
$y=\frac{2x-1}{x+2}$

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=2\\ \lim\limits_{x\to-2^+} y=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-2^-} y=-\infty\end{cases}$

Vậy TCN: $y=2$

TCĐ: $x=-2$

VD3.



Ta có:

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1$ Vậy TCN: $y=\pm1$.

+ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\infty$ Vậy TCĐ: $x=0$.

Xét hàm số $y=f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$

1. Tìm TCN

Bước 1. Dấu hiện nhận biết có tiệm cận: 2 điều kiện

+ Miền xác định D có chứa ∞.

+ Bậc của tử nhỏ hơn hoặc bằng mẫu.

Bước 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ nếu ra kết quả hữu hạn y_0 thì $y=y_0$ là TCN.

* Nhẩm nhanh với phân thức hữu tỉ $y=\frac{ax^m+bx^{m-1}+...+c}{a'x^n+b'x^{n-1}+...+c'}$

+ Bậc $u(x)<v(x)$: có 1 TCN $y=0$ (trục hoành Ox).

+ Bậc $u(x)=v(x)$: có 1 TCN $y=\frac{a}{a'}$.

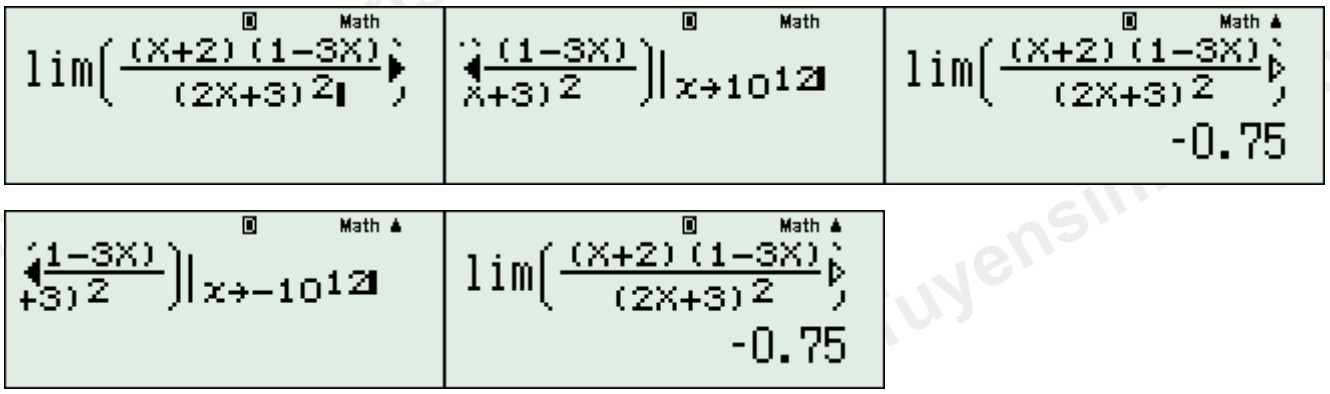
+ Bậc $u(x)>v(x)$: không có TCN.

* Số TCN nhỏ hơn hoặc bằng 2.

* Bấm máy tính: Nhập hàm CALC $x=\pm 10^6 \to \pm 10^{12}$ … nếu ra kết quả hữu hạn thì lấy được.

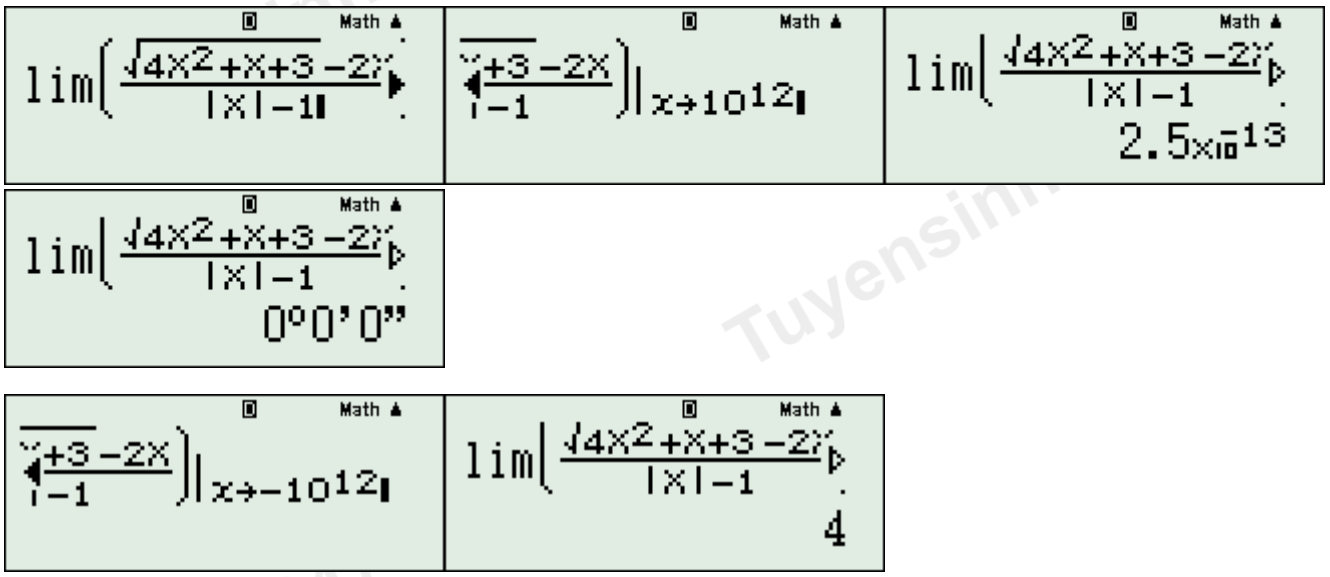
Ví dụ. Tìm các đường TCN của mỗi đồ thị hàm số sau:

a. $y=\frac{(x+2)(1-3x)}{(2x+3)^2}$



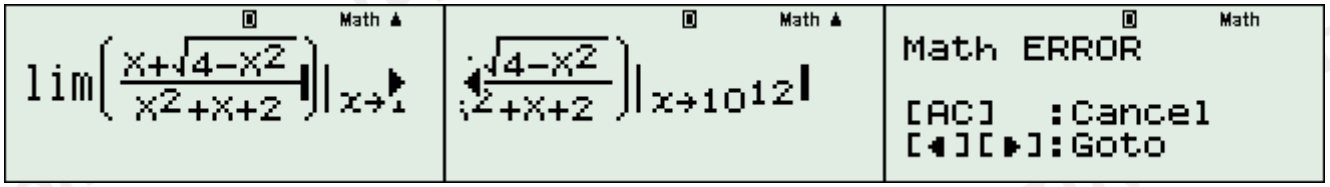
Vậy $y=-\frac{3}{4}$ là TCN.

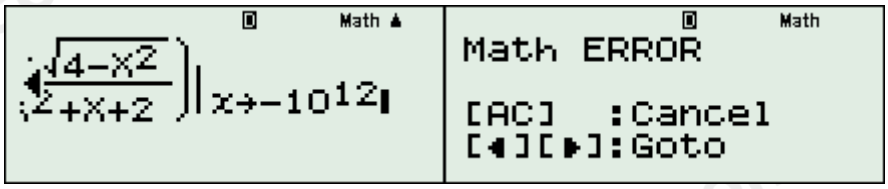
b. $y=\frac{\sqrt{4x^2+x+3}-2x}{|x|-1}$



Vậy TCN: $y=0$ và $y=4$.

c. $y=\frac{x+\sqrt{4-x^2}}{x^2+x+2}$





Vậy không có TCN.

2. Tìm TCĐ

Bước 1. Giải PT $v(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

Bước 2. Nếu $\begin{cases} u(x_k) \neq 0 \\ v(x_k)=0 \end{cases}$ thì $\lim\limits_{x \to x_k} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \infty \Leftrightarrow x = x_k$ là TCĐ.

Bản chất là đi tìm các nghiệm của mẫu (không trùng với nghiệm của tử) sau khi đã rút gọn phân thức tối giản.

Chú ý

+ Số TCĐ nhỏ hơn hoặc bằng bậc của mẫu.

+ Bấm máy tính: Nhập hàm và CALC $x = x_0 \pm 10^{-6}$ hoặc 10^{-9} … nếu ta kết quả ∞ thì lấy được.

Ví dụ. Tìm các đường TCĐ của mỗi đồ thị hàm số sau:

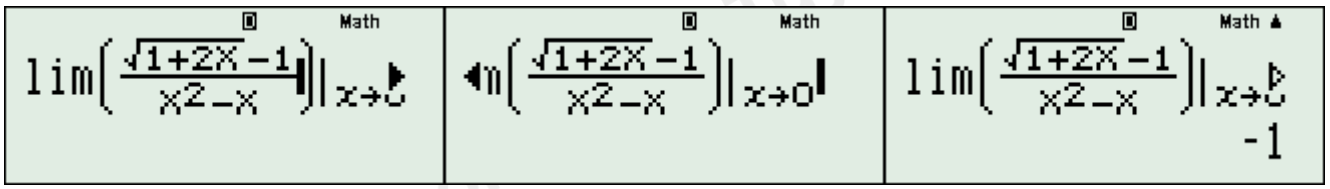
a. $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$

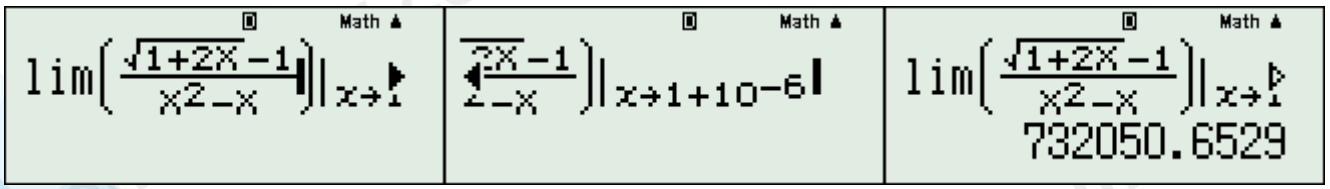
Ta có: $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{x-1}{x-3}$.

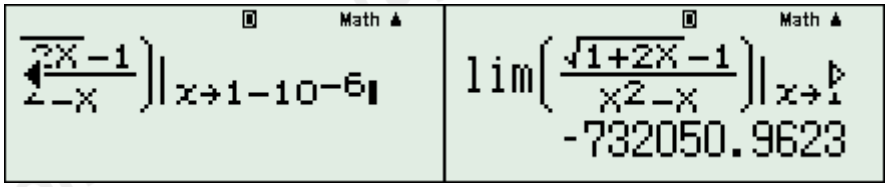
Do đó $x=3$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

b. $y = \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2-x}$

Ta thấy $x^2-x=0$ có hai nghiệm là $x=0,\ x=1$.





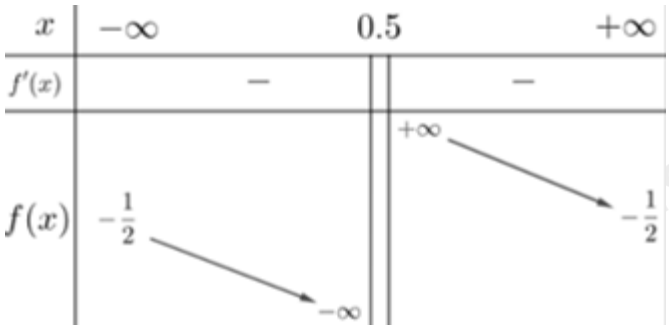


Vậy $x=1$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

B. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. BẢNG BIẾN THIÊN

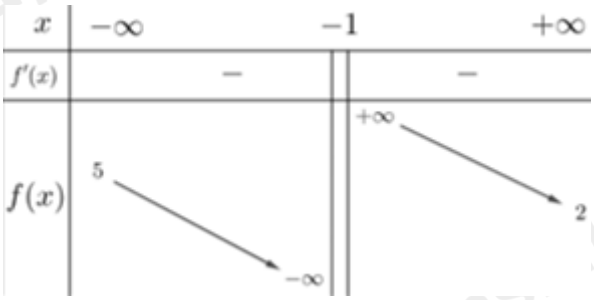
Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Tổng số đường TCN và TCĐ của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **D.** 4

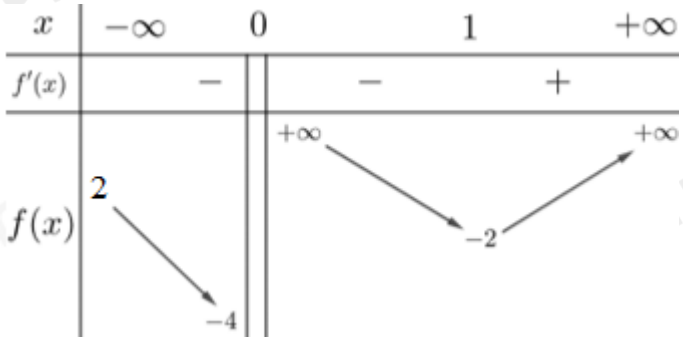
Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Tổng số đường TCN và TCĐ của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **D.** 4

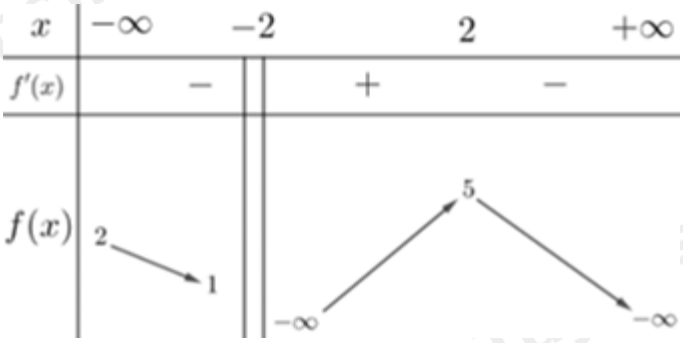
Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số đường TCN và TCĐ của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **D.** 4

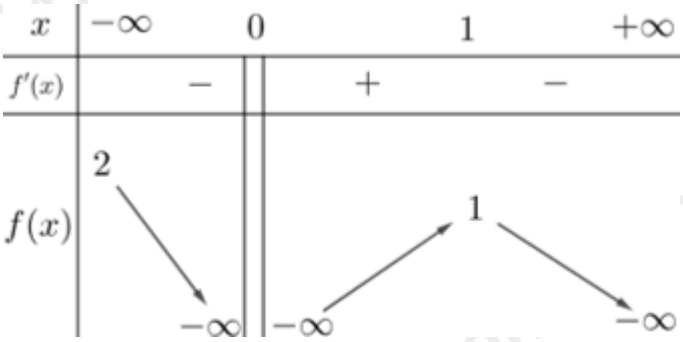
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số đường TCN và TCĐ của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Trong các mệnh đề sau đây có bao nhiêu mệnh đề đúng?

i) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

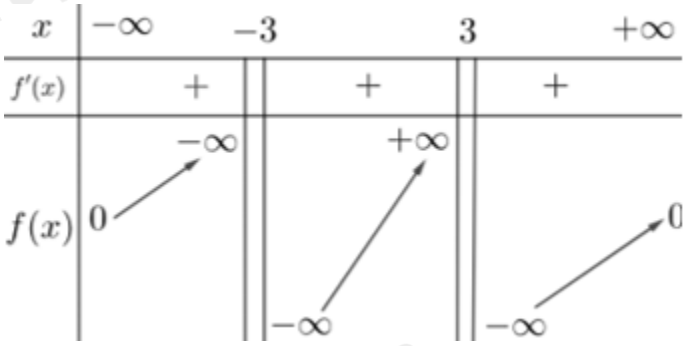
ii) Trên khoảng $(0;+\infty)$, hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1.

iii) Hàm số có 2 điểm cực trị.

iv) Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận đứng.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

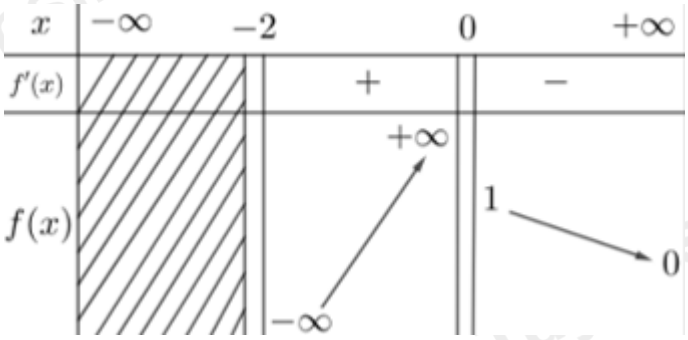
Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có BBT như sau:



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **D.** 4

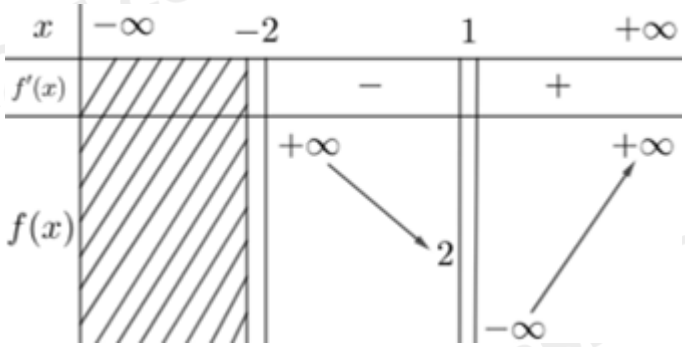
Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có BBT như sau:



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **D.** 4

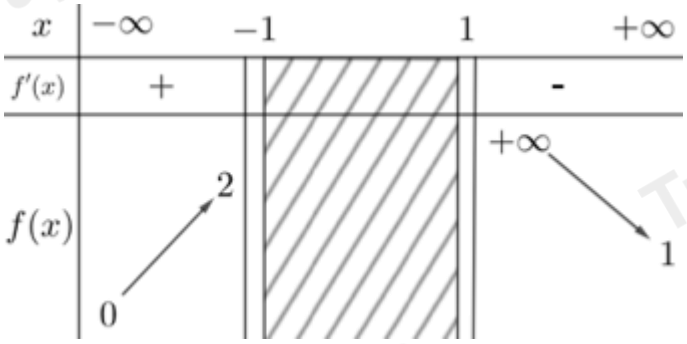
Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có BBT như sau:



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có BBT như sau:

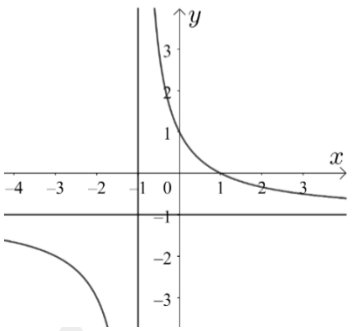


Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **D.** 4

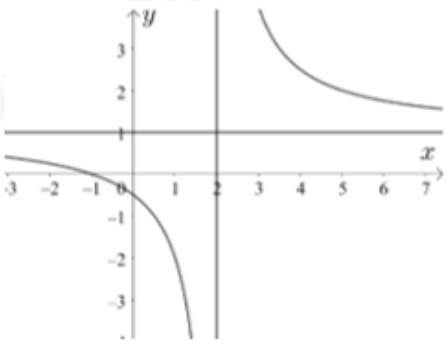
DẠNG 2. ĐỒ THỊ

Câu 10: Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trong hình vẽ bên lần lượt là:



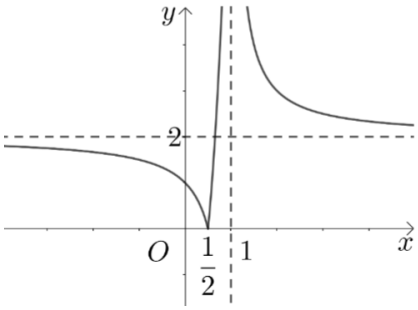
A. $x=1,\ y=1$ **B.** $x=-1,\ y=-1$ **C.** $x=1,\ y=-1$ **D.** $x=-1,\ y=1$

Câu 11: Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số trong hình vẽ bên là:



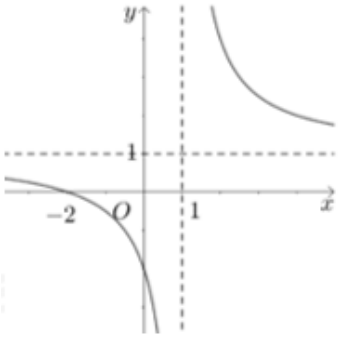
A. $(1;2)$ **B.** $(2;1)$ **C.** $(-1;2)$ **D.** $(2;-1)$

Câu 12: Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trong hình vẽ bên lần lượt là:



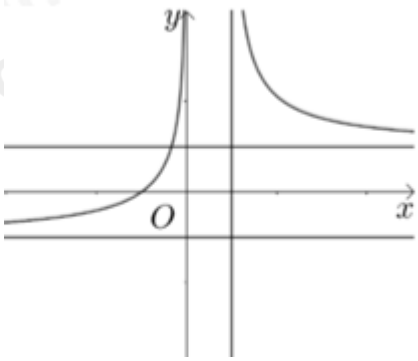
A. $x=\frac{1}{2},\ y=2$ **B.** $x=2,\ y=\frac{1}{2}$ **C.** $x=1,\ y=2$ **D.** $x=2,\ y=1$

Câu 13: Cho hàm số $y=\frac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị như hình vẽ. Tổng $S=a+b+c$ bằng



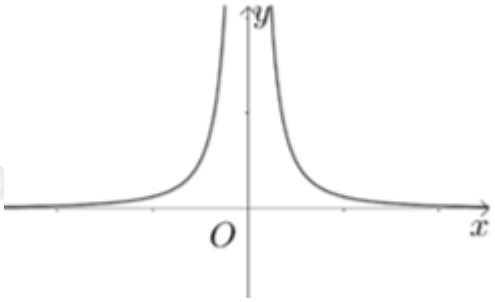
A. $S=2$ **B.** $S=1$ **C.** $S=3$ **D.** $S=4$

Câu 14: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trong hình vẽ bên là:



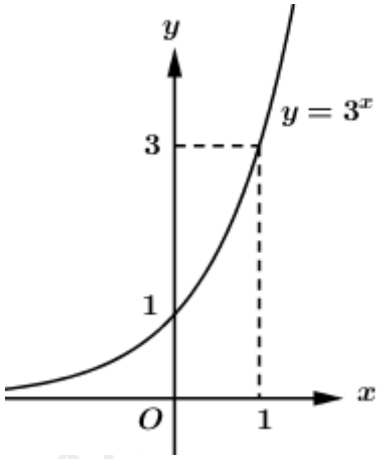
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 15: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trong hình vẽ bên là:



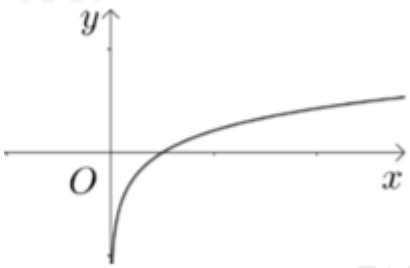
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 16. Đồ thị hàm số trong hình vẽ bên có phương trình đường tiệm cận là:



A. $x=0$ **B.** $y=0$ **C.** $x=1$ **D.** $y=1$

Câu 17. Đồ thị hàm số trong hình vẽ bên có phương trình đường tiệm cận là:

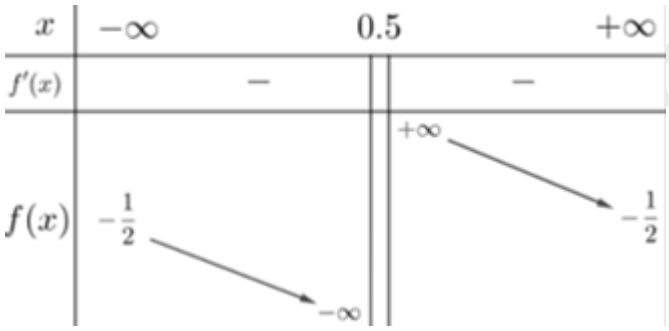


A. $x=0$ **B.** $y=0$ **C.** $x=1$ **D.** $y=1$

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1. BẢNG BIẾN THIÊN

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Tổng số đường TCN và TCĐ của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

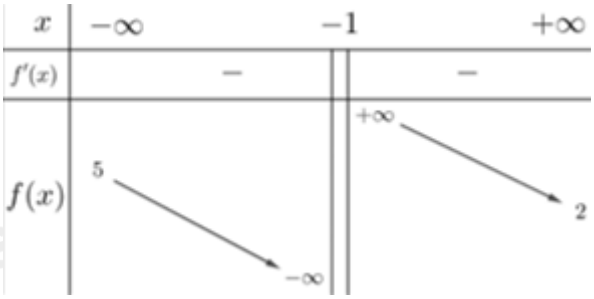
Dựa vào BBT ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\frac{1}{2}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$ là TCN.

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\infty \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ là TCĐ.

Vậy đồ thị có tất cả 2 đường tiệm cận.

Chọn B.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Tổng số đường TCN và TCĐ của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

Dựa vào BBT ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5 \Rightarrow y=5$ là TCN.

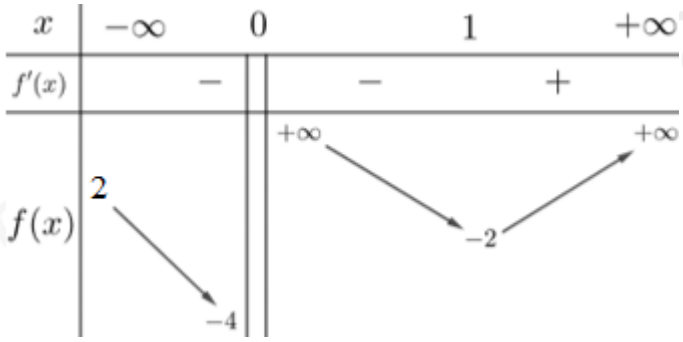
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Rightarrow y=2$ là TCN.

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\infty \Rightarrow x=-1$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận.

Chọn C.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số đường TCN và TCĐ của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

Dựa vào BBT ta có:

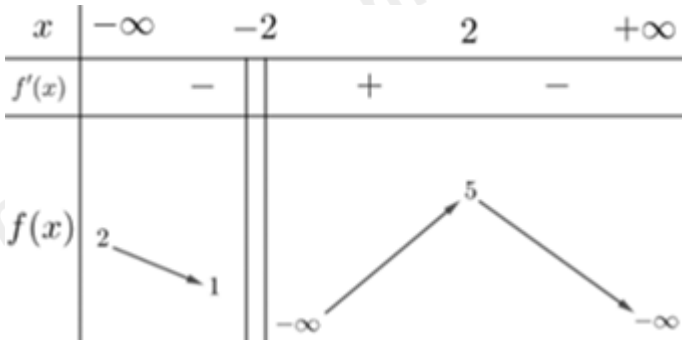
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\Rightarrow y=2$ là TCN.

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty\Rightarrow x=0$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 2 đường tiệm cận.

Chọn B.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số đường TCN và TCĐ của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

Dựa vào BBT ta có:

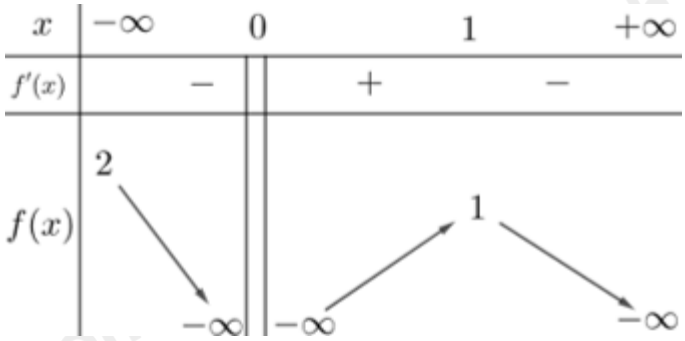
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\Rightarrow y=2$ là TCN.

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty\Rightarrow x=-2$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 2 đường tiệm cận.

Chọn B.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Trong các mệnh đề sau đây có bao nhiêu mệnh đề đúng?

i) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

ii) Trên khoảng $(0;+\infty)$, hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1.

iii) Hàm số có 2 điểm cực trị.

iv) Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận đứng.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

Dựa vào BBT ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ nên không tồn tại x_0 để $f(x_0)=2$. Do đó i) sai.

Dễ thấy ii) đúng.

Tại $x=0$ hàm số không xác định nên $x=0$ không là điểm cực trị. Do đó iii) sai.

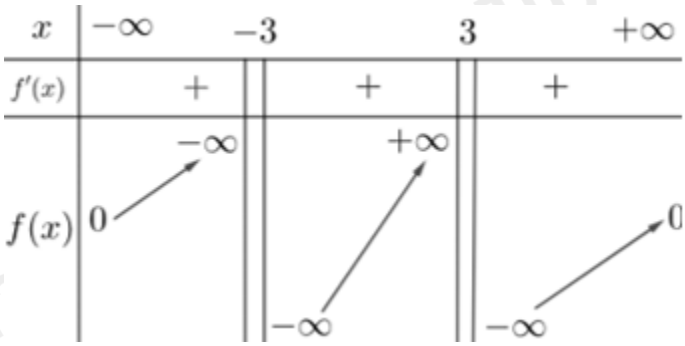
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ nên $y=2$ là TCN.

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$ nên $x=0$ là TCĐ. Do đó iv) đúng.

Vậy có tất cả 2 mệnh đề đúng.

Chọn B.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có BBT như sau:



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

Dựa vào BBT ta có:

+ $y=0$ là TCN.

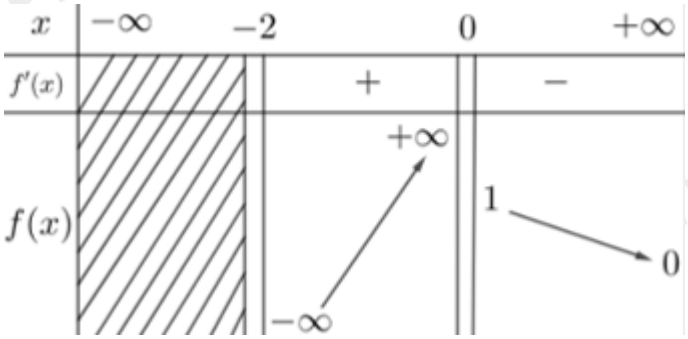
+ $x=-3$ là TCĐ.

+ $x=3$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận.

Chọn C.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có BBT như sau:



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

Dựa vào BBT ta có:

+ $y=0$ là TCN.

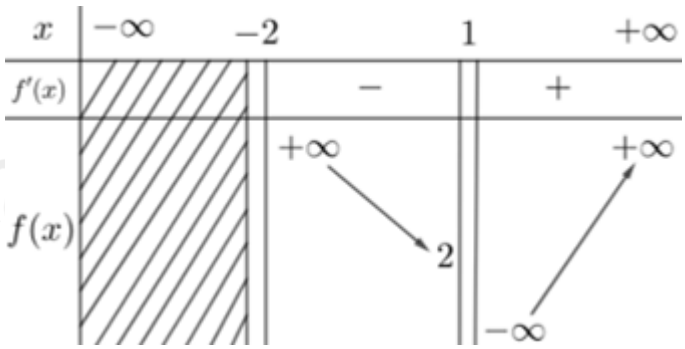
+ $x=-2$ là TCĐ.

+ $x=0$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận.

Chọn C.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có BBT như sau:



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

Dựa vào BBT ta có:

+ Đồ thị không có TCN.

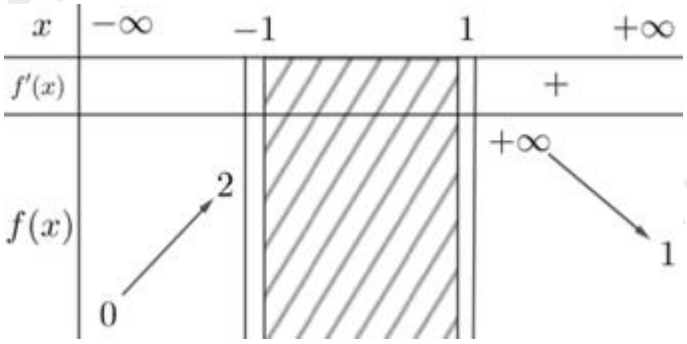
+ $x=-2$ là TCĐ.

+ $x=1$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 2 đường tiệm cận.

Chọn B.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có BBT như sau:



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

Dựa vào BBT ta có:

+ $y=0$ là TCN.

+ $y=1$ là TCN.

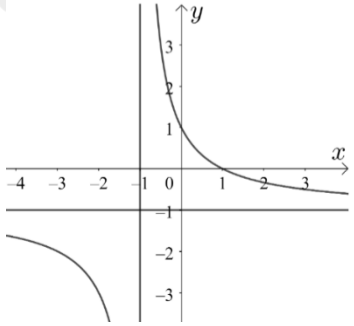
+ $x=1$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận.

Chọn C.

DẠNG 2. ĐỒ THỊ

Câu 10: Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trong hình vẽ bên lần lượt là:



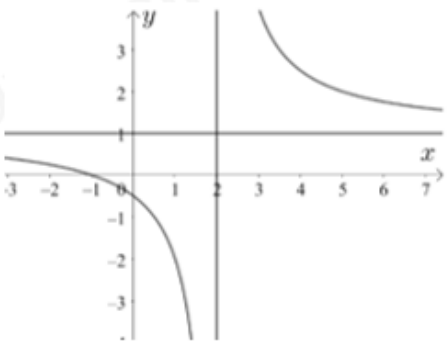
A. $x=1,\ y=1$ **B.** $x=-1,\ y=-1$ **C.** $x=1,\ y=-1$ **D.** $x=-1,\ y=1$

Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có TCĐ, TCN lần lượt là $x=-1,\ y=-1$.

Chọn B.

Câu 11: Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số trong hình vẽ bên là:



A. $(1;2)$ **B.** $(2;1)$ **C.** $(-1;2)$ **D.** $(2;-1)$

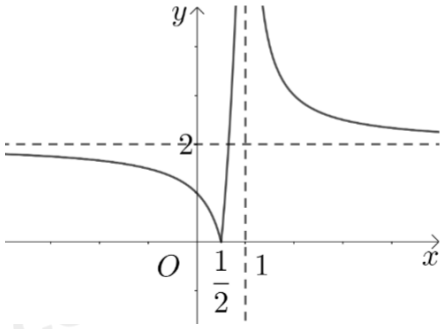
Lời giải:

Ta có tọa độ tâm đối xứng của đồ thị chính là giao của TCĐ và TCN.

Do đó tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số trong hình vẽ bên là: $(2;1)$.

Chọn B.

Câu 12: Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trong hình vẽ bên lần lượt là:



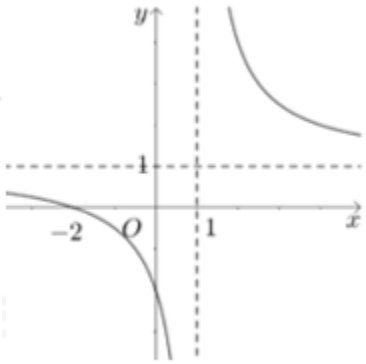
A. $x=\frac{1}{2},\ y=2$ **B.** $x=2,\ y=\frac{1}{2}$ **C.** $x=1,\ y=2$ **D.** $x=2,\ y=1$

Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có TCĐ, TCN lần lượt là $x=1,\ y=2$.

Chọn C.

Câu 13: Cho hàm số $y=\frac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị như hình vẽ. Tổng $S=a+b+c$ bằng



A. $S=2$ **B.** $S=1$ **C.** $S=3$ **D.** $S=4$

Lời giải:

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-2;0)$ nên $\frac{-2a+2}{-2c+b}=0\Leftrightarrow -2a+2=0\Leftrightarrow a=1.$

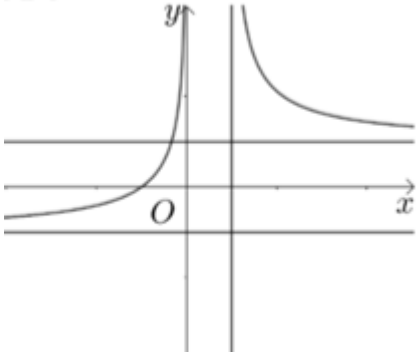
Tiệm cận ngang $y=\frac{a}{c}=1\Rightarrow c=1.$

Tiệm cận đứng $x=-\frac{b}{c}=1\Rightarrow b=-c=-1.$

Vậy $S=a+b+c=1-1+1=1.$

Chọn B.

Câu 14: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trong hình vẽ bên là:



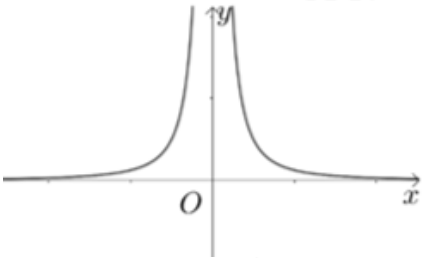
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có 2 TCĐ, 2 TCN.

Chọn D.

Câu 15: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trong hình vẽ bên là:



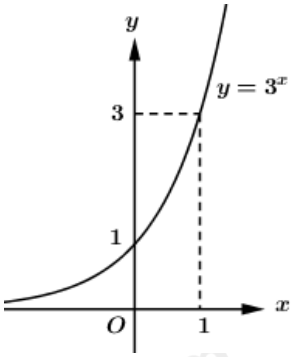
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có 1 TCĐ, 1 TCN.

Chọn D.

Câu 16. Đồ thị hàm số trong hình vẽ bên có phương trình đường tiệm cận là:



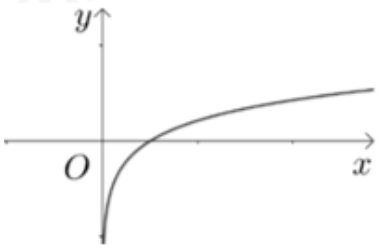
A. $x=0$ **B.** $y=0$ **C.** $x=1$ **D.** $y=1$

Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có TCN $y=0$.

Chọn B.

Câu 17. Đồ thị hàm số trong hình vẽ bên có phương trình đường tiệm cận là:



A. $x=0$ **B.** $y=0$ **C.** $x=1$ **D.** $y=1$

Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có TCĐ $x=0$.

Chọn A.