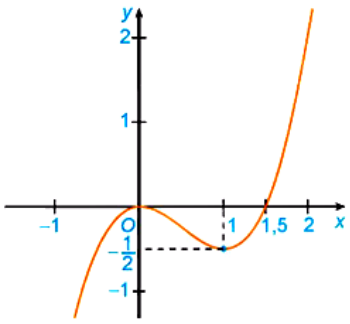
BÀI GIẢNG: TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (TIẾT 3)
CHUYÊN ĐỀ: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT VẼ ĐỒ THỊ
MÔN: TOÁN 12 (KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG)
GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

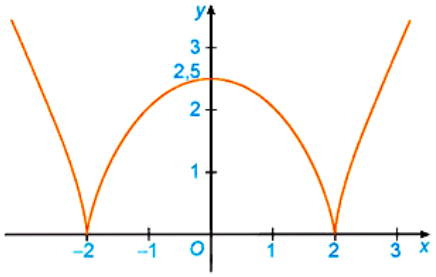
- ✓ *Nhận biết tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên một khoảng dựa vào dấu đạo hàm cấp một của nó.*
- ✓ *Thể hiện tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trong bảng biến thiên.*
- ✓ *Nhận biết tính đơn điệu của hàm số thông qua bảng biến thiên hoặc thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số.*
- ✓ *Nhận biết điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số thông qua bảng biến thiên hoặc thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số.*

BÀI TẬP

1.1. Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của các hàm số có đồ thị như sau:



Hình 1.11



Hình 1.12

a) Đồ thị hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ (H.1.11);

b) Đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}$ (H.1.12).

1.2. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$;

b) $y = -x^3 + 2x^2 - 5x + 3$.

1.3. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x-1}{x+2}$

b) $y = \frac{x^2+x+4}{x-3}$.

1.4. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{4-x^2}$;

b) $y = \frac{x}{x^2+1}$.

1.5. Giả sử số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số $N(t) = \frac{25t+10}{t+5}, t \geq 0$

trong đó $N(t)$ được tính bằng nghìn người.

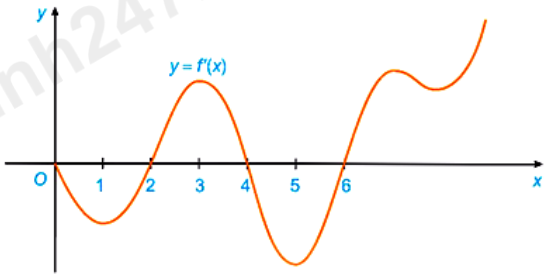
a) Tính số dân của thị trấn đó vào các năm 2000 và 2015.

b) Tính đạo hàm $N'(t)$ và $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$. Từ đó, giải thích tại sao số dân của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá một ngưỡng nào đó.

1.6. Đồ thị của đạo hàm bậc nhất $y = f'(x)$ của hàm số $f(x)$ được cho trong Hình 1.13.

a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên những khoảng nào? Giải thích.

b) Tại giá trị nào của x thì $f(x)$ có cực đại hoặc cực tiểu? Giải thích.



Hình 1.13

1.7. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$;

b) $y = x^4 - 4x^2 + 2$

c) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$

d) $y = \sqrt{4x - 2x^2}$

1.8. Cho hàm số $y = f(x) = |x|$.

a) Tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Từ đó suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

b) Sử dụng định nghĩa, chứng minh hàm số có cực tiểu tại $x = 0$ (xem Hình 1.4).

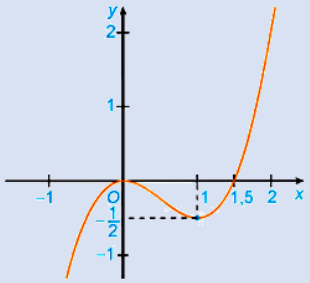
1.9. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0,$$

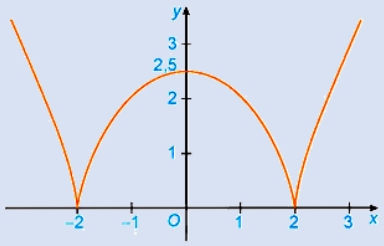
trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

HƯỚNG DẪN GIẢI

1.1. Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của các hàm số có đồ thị như sau:



Hình 1.11



Hình 1.12

a) Đồ thị hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}x^2$ (H.1.11);

b) Đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}$ (H.1.12).

Cách giải:

a) Hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}x^2$ đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}x^2$ nghịch biến trên $(0;1)$.

b) Hàm số $y=\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}$ đồng biến trên $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$

Hàm số $y=\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

1.2. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$;

b) $y=-x^3+2x^2-5x+3$.

Cách giải:

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có:

$$y'=x^2-4x+3,\ y'=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{7}{3}$	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$.

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-3x^2+4x-5$

Vì $-3x^2+4x-5=-3\left(x^2-2\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)-\frac{11}{3}=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{11}{3}<0\forall x\in\mathbb{R}$

Do đó, $y'<0\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y=-x^3+2x^2-5x+3$ nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$

1.3. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y=\frac{2x-1}{x+2}$ b) $y=\frac{x^2+x+4}{x-3}$.

Cách giải:

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có:

$$y'=\frac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}=\frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)}>0\forall x\neq-2$$

Do đó, hàm số $y=\frac{2x-1}{x+2}$ đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$

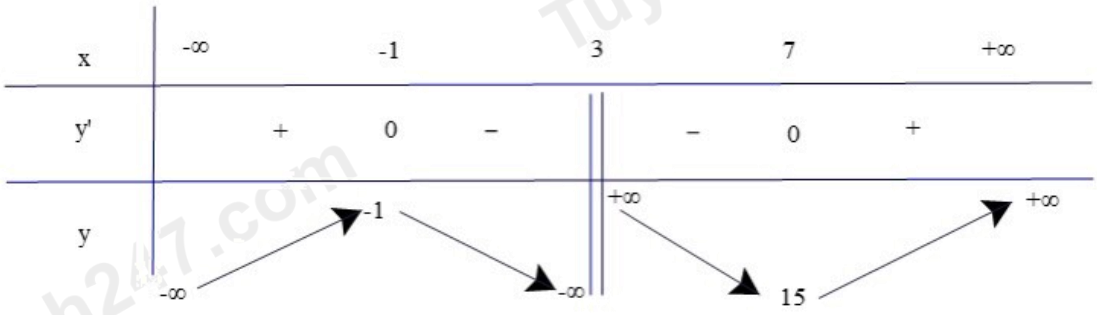
b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Ta có:

$$y'=\frac{\left(x^2+x+4\right)'(x-3)-\left(x^2+x+4\right)(x-3)'}{(x-3)^2}=\frac{(2x+1)(x-3)-x^2-x-4}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x-7}{(x-3)^2}$$

$$y'=0\Leftrightarrow\frac{x^2-6x-7}{(x-3)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7\\x=-1\end{array}\right.\quad\text{(thỏa mãn)}$$

Lập bảng biến thiên của hàm số:



Từ bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số $y=\dfrac{x^2+x+4}{x-3}$ nghich biến trên khoảng $(-1;3)$ và $(3;7)$.

Hàm số $y=\dfrac{x^2+x+4}{x-3}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(7;+\infty)$

1.4. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{4-x^2}$; b) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

Cách giải:

a) Tập xác định: $D=[-2;2]$.

Ta có: $y'=\dfrac{\left(4-x^2\right)'}{2\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}, y'=0\Leftrightarrow x=0(\text{tm})$

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	−2		0		2
y'		+	0	−	
y	0	↗	2	↘	0

Hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có:

$$y'=\frac{\left(x^2+1\right)-2x\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2},$$

$$y'=0\Leftrightarrow\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	−∞		−1		1		+∞
y'		−	0	+	0	−	
y	0	↘	$\frac{-1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

Hàm số $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$.

Hàm số $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

1.5. Giả sử số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số

$$N(t)=\frac{25t+10}{t+5}, t\geq 0$$

trong đó $N(t)$ được tính bằng nghìn người.

a) Tính số dân của thị trấn đó vào các năm 2000 và 2015.

b) Tính đạo hàm $N'(t)$ và $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$. Từ đó, giải thích tại sao số dân của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá một ngưỡng nào đó.

Cách giải:

a) Dân số của thị trấn đó vào năm 2000 là: $N(0)=\dfrac{25.0+10}{0+5}=\dfrac{10}{5}=2$ (nghìn người)

Dân số của thị trấn đó vào năm 2015 là: $N(15)=\dfrac{25.15+10}{15+5}=19,25$ (nghìn người)

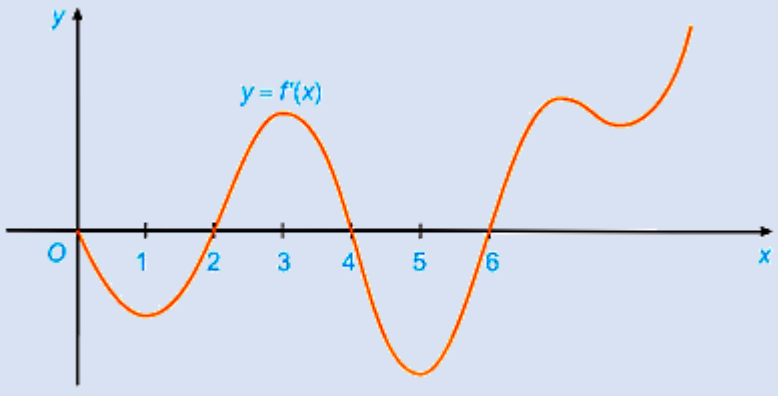
b) Ta có: , $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{25t+10}{t+5}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{25+\dfrac{10}{t}}{1+\dfrac{5}{t}}=25$

Vì $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)=25$ và nên dân số của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt qua ngưỡng 25 nghìn người.

1.6. Đồ thị của đạo hàm bậc nhất $y=f'(x)$ của hàm số $f(x)$ được cho trong Hình 1.13.

a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên những khoảng nào? Giải thích.

b) Tại giá trị nào của x thì $f(x)$ có cực đại hoặc cực tiểu? Giải thích.



Hình 1.13

Cách giải:

a) Vì $f'(x)>0$ khi $x\in(2;4)$ và $x\in(6;+\infty)$. Do đó, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(2;4)$ và $(6;+\infty)$.

Vì $f'(x)<0$ khi $x\in(0;2)$ và $x\in(4;6)$. Do đó, hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$ và $(4;6)$.

b) Vì $f'(x)<0$ với mọi $x\in(0;2)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(2;4)$ thì $x=2$ là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Vì $f'(x)>0$ với mọi $x\in(2;4)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(4;6)$ thì điểm $x=4$ là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Vì $f'(x)<0$ với mọi $x\in(4;6)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(6;+\infty)$ thì điểm $x=6$ là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$. .

1.7. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=2x^3-9x^2+12x-5$;

b) $y=x^4-4x^2+2$

c) $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$

d) $y=\sqrt{4x-2x^2}$

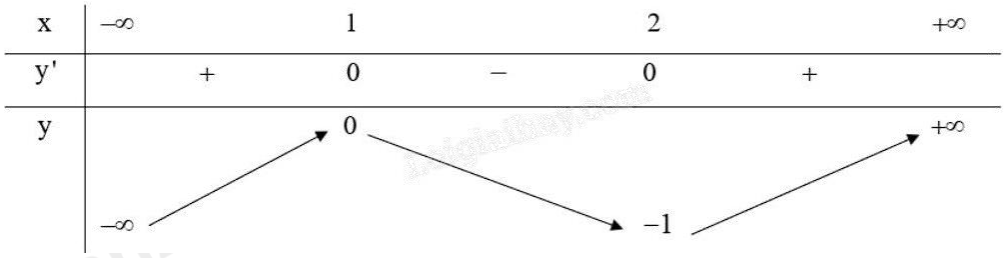
Cách giải:

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=6x^2-18x+12,$

$y'=0\Leftrightarrow 6x^2-18x+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số $y=2x^3-9x^2+12x-5$ có điểm cực đại là $(1;0)$.

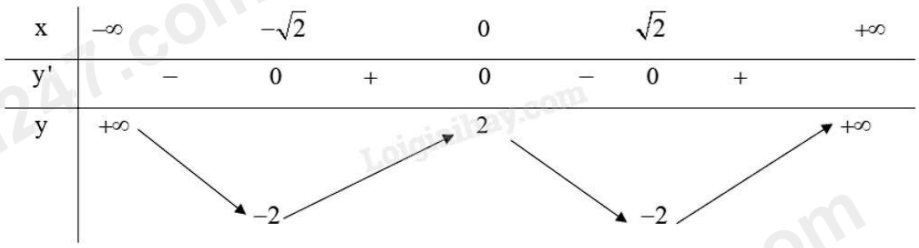
Hàm số $y=2x^3-9x^2+12x-5$ có điểm cực tiểu là $(2;-1)$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có:

$y'=4x^3-8x, y'=0\Leftrightarrow 4x^3-8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số $y=x^4-4x^2+2$ đạt cực đại tại $x=0$ và.

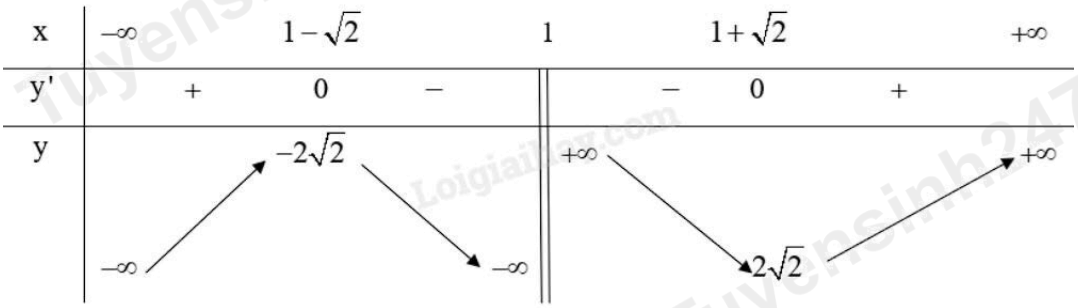
Hàm số $y=x^4-4x^2+2$ đạt cực tiểu tại $x=\pm\sqrt{2}$ và $y_{CT}=-2$

c) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{(2x-2)(x-1)-\left(x^2-2x+3\right)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{2}\\x=1+\sqrt{2}\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Lập bảng biến thiên của hàm số:



Từ bảng biến thiên ta có:

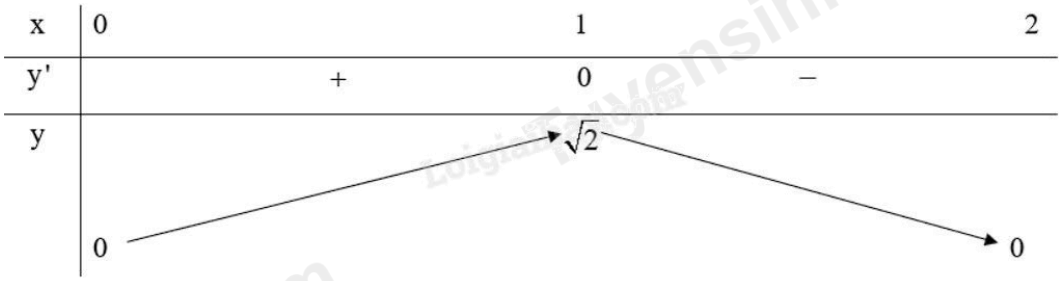
Hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$ đạt cực đại tại $x=1-\sqrt{2}$ và .

Hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$ đạt cực tiểu tại $x=1+\sqrt{2}$ và $y_{CT}=2\sqrt{2}$

d) Tập xác định: $D=[0;2]$.

Ta có: $y'=\dfrac{\left(4x-2x^2\right)'}{2\sqrt{4x-2x^2}}=\dfrac{-x+1}{\sqrt{4x-2x^2}}, y'=0\Leftrightarrow x=1(\text{tm})$

Ta có bảng biến thiên của hàm số:



Do đó, hàm số đạt cực đại tại $x=1$, hàm số không có cực tiểu.

1.8. Cho hàm số $y=f(x)=|x|$.

a) Tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ và $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Từ đó suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

b) Sử dụng định nghĩa, chứng minh hàm số có cực tiểu tại $x=0$ (xem Hình 1.4).

Cách giải:

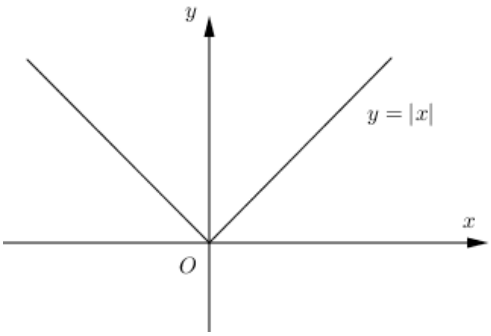
a)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)=|x|$:



Ta có: $y=f(x)=|x|=\begin{cases}-x & \text{khi } x\in(-\infty;0)\\ x & \text{khi } x\in(0;+\infty)\end{cases}$

Hàm số $y=f(x)=|x|$ liên tục và xác định trên $(-\infty;+\infty)$

Với số $h>0$ ta có: Với $x\in(-h;h)\subset(-\infty;+\infty)$ và $x\neq 0$ thì $y=f(x)=|x|>0=f(0)$

Do đó, hàm số $y=f(x)=|x|$ có cực tiểu là $x=0$.

1.9. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f(t)=\frac{5000}{1+5e^{-t}},t\geq 0,$$

trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Cách giải:

Ta có: $f'(t)=\frac{-5000\left(1+5e^{-t}\right)'}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}=\frac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$

Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

Đặt $h(t)=\frac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$

$$h'(t)=\frac{-25000e^{-t}\left(1+5e^{-t}\right)^2-2\cdot\left(-5e^{-t}\right)\cdot\left(1+5e^{-t}\right)\cdot 25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^4}$$

$$=\frac{-25000e^{-t}\left(1+5e^{-t}\right)\left(1+5e^{-t}-10e^{-t}\right)}{(1+5e-t)^4}=\frac{-25000e^{-t}\left(1-5e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^3}$$

$$h'(t)=0\Leftrightarrow\frac{-25000e^{-t}\left(1-5e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^3}=0\Leftrightarrow 1-5e^{-t}=0\Leftrightarrow e^{-t}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow t=\ln 5\ (\text{tm})$$

Ta có bảng biến thiên với $t\in[0;+\infty)$:

t	0		$\ln 5$		$+\infty$
h'(t)		+	0	−	
h(t)	$\frac{6\,250}{9}$	↗	1250	↘	0

Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5\approx 1,6$ năm thi thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.