BÀI GIẢNG: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG
CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU
MÔN: TOÁN
GIÁO VIÊN: ĐOÀN NGỌC DUY TRÌNH

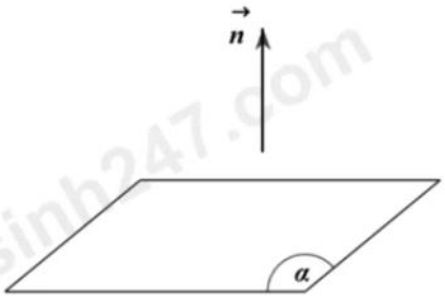
MỤC TIÊU

- ✓ *Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng*
- ✓ *Tích có hướng của hai vectơ*
- ✓ *Phương trình tổng quát của mặt phẳng*
- ✓ *Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng*

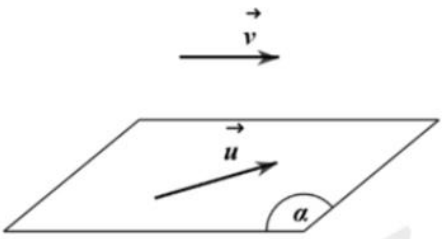
I. VECTƠ PHÁP TUYẾN VÀ CẶP VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA MẶT PHẲNG

Trong không gian, cho mặt phẳng (α).

- Nếu vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của (α).
- Nếu hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì $\vec{u},\vec{v}$ được gọi là cặp vectơ chi phương của (α).



Hình 1a



Hình 1b

Chú ý:

- Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó hoặc biết một điểm và một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng đó.
- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α) thì $k\vec{n}$ với $k \neq 0$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, đâu là một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (Oxy) ?

A. $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;0)$ và $\overrightarrow{v_1}=(-2;4;0)$.

B. $\overrightarrow{u_2}=(2;1;0)$ và $\overrightarrow{v_2}=(0;3;-1)$.

C. $\overrightarrow{u_3}=(2;3;0)$ và $\overrightarrow{v_3}=(-1;2;0)$.

D. $\overrightarrow{u_4}=(0;-1;2)$ và $\overrightarrow{v_4}=(2;1;0)$.

Cách giải:

Vecto pháp tuyến của (Oxy) là $\vec{k}=(0;0;1)$

Ta có $\overrightarrow{u_3}=(2;3;0)$ và $\overrightarrow{v_3}=(-1;2;0)$ là 2 vectơ không cùng phương, có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{u_3}\cdot\vec{k}=2\cdot 0+2\cdot 0+0\cdot 1=0\\ \overrightarrow{v_3}\cdot\vec{k}=-1\cdot 0+2\cdot 0+0\cdot 0=0\end{cases}$$

Vậy $\overrightarrow{u_3}=(2;3;0)$ và $\overrightarrow{v_3}=(-1;2;0)$ là một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (Oxy)

Chọn C.

II. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1 Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ không cùng phương là $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$.

Vectơ $\vec{n}$ được gọi là tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi và chỉ khi:

$$\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1),\text{ kí hiệu là }\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$$

2 Tính chất

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$. Khi đó ta có:

- $\vec{n}\perp\vec{a};\vec{n}\perp\vec{b}$;
- $|\vec{n}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a};\vec{b})$;
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow\vec{n}=\vec{0}$;
- $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\vec{c}=0$;

Hệ quả:

- Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$;
- Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$;
- Thể tích hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ là $V_{ABCD\cdot A'B'C'D'}=\left|\overrightarrow{AA'}\cdot\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$.

Ví dụ 2: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $O(0;0;0),A(0;1;-2),B(1;2;1),C(4;3;m)$. Giá trị của m để bốn điểm O,A,B,C đồng phẳng là

A. $m=14$. **B.** $m=7$. **C.** $m=-14$. **D.** $m=-7$.

Cách giải:

Ta có:

$\overrightarrow{OA}=(0;1;-2)$

$\overrightarrow{OB}=(1;2;1)$

$\overrightarrow{OC}=(4;3;m)$

$[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}]=(5;-2;-1)$

Để bốn điểm O,A,B,C đồng phẳng thì $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ đồng phẳng

$\Leftrightarrow [\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}]\cdot\overrightarrow{OC}=0$

$\Leftrightarrow 5\cdot 4+(-2)\cdot 3+(-1)\cdot m=0$

$\Leftrightarrow 14-m=0$

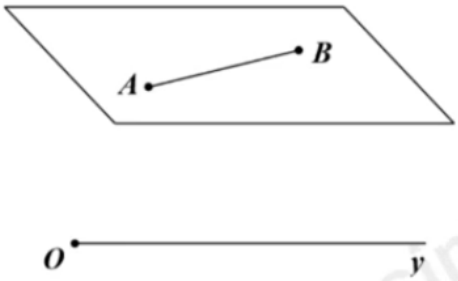
$\Leftrightarrow m=14$

Chọn A.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1;0;2), B(2;-2;3)$ và song song với trục Oy. Trong các vectơ dưới đây, vectơ nào là vectơ pháp tuyến của (α) ?

A. $(1;0;1)$. **B.** $(1;0;-1)$. **C.** $(0;1;1)$. **D.** $(1;-1;0)$.

Cách giải:



VTCP của Oy là: $\vec{j}=(0;1;0)$

Ta có $\overrightarrow{AB},\vec{j}$ là cặp VTCP của (α)

VTPT của (α) $\vec{n}=[\overrightarrow{AB};\vec{j}]=(-1;0;1)$

$k\vec{n}=(-1)\cdot\vec{n}=(1;0;-1)$

Chọn B.

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có $A(1;0;2), B(-1;2;0), C(3;-1;1)$ và $D'(2;1;-2)$. Thể tích khối hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ là

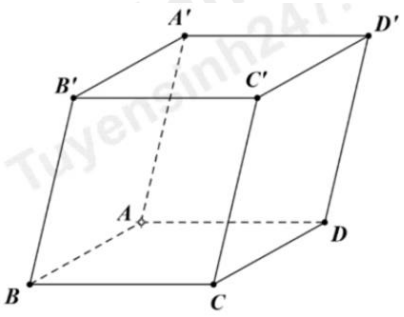
A. 3. **B.** 2. **C.** 18. **D.** 12.

Cách giải:

Gọi $D(x;y;z)$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{BA}=(2;-2;2)\\ \overrightarrow{CD}=(x-3;y+1;z-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\ y=-3\\ z=3\end{cases}$

Suy ra:



$\overrightarrow{DA}=(-4;3;-1)$

$\overrightarrow{DD'}=(-3;4;-5)$

$\overrightarrow{DC}=(-2;2;-2)$

$\left[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right]=(-4;-6;-2)$

Thể tích khối hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ là

$V=\left|\left[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right]\cdot\overrightarrow{DD'}\right|=\left|(-3)\cdot(-4)+4\cdot(-6)+(-5)\cdot(-2)\right|=2$

Chọn B.

III. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG

1 Định nghĩa

Phương trình có dạng $Ax+By+Cz+D=0$, trong đó A,B,C không đồng thời bằng 0, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Chú ý:

✓ Nếu mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax+By+Cz+D=0$, kí hiệu $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ thì nó có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.

✓ Điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0 \Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

✓ Mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n}=(A;B;C)$ khác $\vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến thì phương trình mặt phẳng đó có dạng là $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

✓ Mặt phẳng cắt ba trục tọa độ Ox,Oy,Oz lần lượt tại ba điểm $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với a,b,c đều khác 0 thì phương trình mặt phẳng đó có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Khi đó, phương trình này được gọi là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

Ví dụ 5: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha): 3x-y+z-1=0$. Trong các điểm sau đây, điểm nào thuộc (α) ?

A. $A(1;-2;4)$. **B.** $B(1;-2;-4)$. **C.** $C(1;2;-4)$. **D.** $D(-1;-2;-4)$.

Cách giải:

Xét phương án

A. $A(1;-2;4)$.

Ta có: $3\cdot 1-(-2)+4-1\neq 0 \Rightarrow A\notin(\alpha)$

B. $B(1;-2;-4)$.

Ta có $3\cdot 1-(-2)+(-4)-1=0 \Rightarrow B\in(\alpha)$

Chọn B.

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3;1;0)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;-1)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là

A. $x-2y-z-6=0$. **B.** $3x+y-10=0$. **C.** $x-2y-z-1=0$. **D.** $3x+y+1=0$.

Cách giải:

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3;1;0)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;-1)$ là:

$(P): 1(x-3)-2(y-1)-1(z-0)=0$

$\Leftrightarrow \quad x-2y-z-1=0$

Chọn C.

Ví dụ 7: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;4)$ và hai vectơ $\vec{u}=(1;6;5),\vec{v}=(1;-1;-2)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và song song với giá của các vectơ $\vec{u},\vec{v}$. Phương trình mặt phẳng (α) là

A. $7x-2y+z-9=0$. **B.** $x+y-z+2=0$. **C.** $x-y+z-2=0$. **D.** $x-y+z-4=0$.

Cách giải:

Ta có $\vec{u},\vec{v}$ là cặp VTCP của (α)

$\Rightarrow \vec{n}=[\vec{n},\vec{v}]=(-7;7;-7)$ là VTPT của (α)

Chọn VTPT là: $(1;-1;1)$

Vậy phương trình tổng quát của (α) là:

$x-1-(y-1)+z-4=0$

$\Leftrightarrow x-y+z-4=0$

Chọn D.

Ví dụ 8: Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng là $(\beta):x-2y-z+1=0;(\beta_1):2x-y-z-1=0$ và $(\beta_2):3x-y+z-1=0$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa giao tuyến của hai mặt phẳng $(\beta_1),(\beta_2)$, đồng thời vuông góc với mặt phẳng (β). Phương trình mặt phẳng (α) là

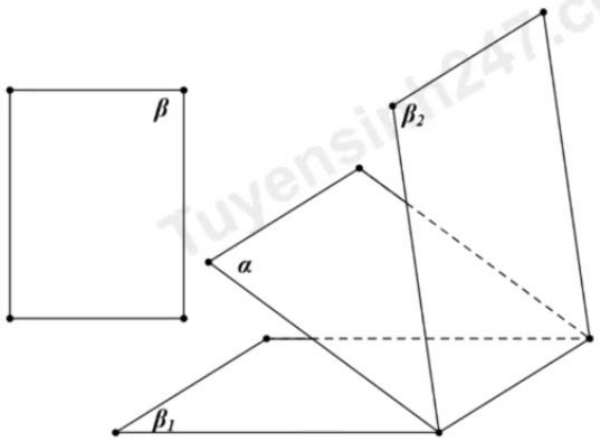
A. $7x-y+9z-1=0$. **B.** $7x+y-9z-1=0$. **C.** $7x+y-9z+1=0$. **D.** $7x-y+9z+1=0$.

Cách giải:

Gọi giao tuyến của mặt phẳng (β) và mặt phẳng (α) là đường thẳng d

$\vec{u}$ là vec tơ có giá nằm trên đường thẳng d

Ta có $\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{n}_{(\beta_1)}\\ \vec{u}\perp\vec{n}_{(\beta_2)}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(-2;-5;1)$



Có: $\vec{n}_{(\alpha)}\perp\vec{n}_{(\beta)}$, $\vec{n}_{(\alpha)}\perp\vec{u}\Rightarrow\overrightarrow{n(\alpha)}=(-7;1;-9)$

Gọi $M(x_0;y_0;z_0)\in d$

$\begin{cases}M\in(\beta_1)\Rightarrow 2x_0-y_0-z_0-1=0\\ M\in(\beta_2)\Rightarrow 2x_0-y_0+z_0-1=0\end{cases}$

Chọn $x_0=0\Rightarrow\begin{cases}-y_0-z_0=1\\ -y_0+z_0=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_0=-1\\ z_0=0\end{cases}\Rightarrow M(0;-1;0)$

Phương trình mặt phẳng (α), có $\overrightarrow{n(\alpha)}=(-7;1;-9)$, đi qua $M(0;-1;0)$ là:

$(\alpha):-7(x-0)+y+1-9(z-0)=0$

$\Leftrightarrow -7x+y-9z+1=0$

$\Leftrightarrow 7x-y+9z-1=0$

Chọn A.

Ví dụ 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;3)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua H và cắt ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (α) là

A. $3x+y+2z-11=0$. **B.** $3x+2y+z-10=0$. **C.** $x+3y+2z-13=0$. **D.** $x+2y+3z-14=0$.

Cách giải:

Gọi $BH \cap AC = E$

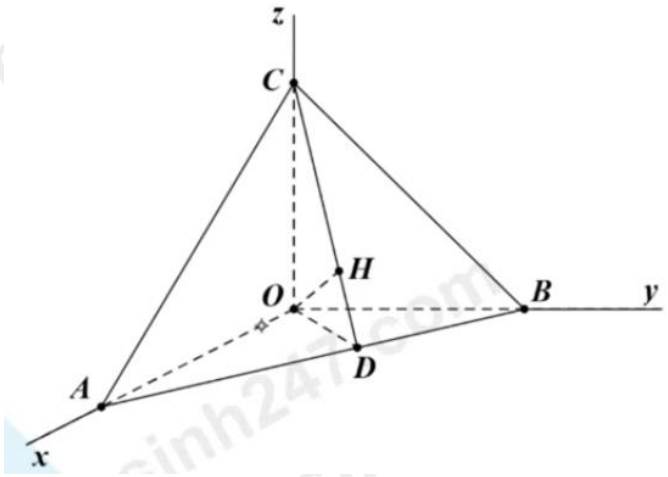
Ta có $\begin{cases} OH \perp AB \ (AB \perp (OCD)) \\ OH \perp AC \ (AC \perp (OBE)) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OH} \perp (ABC)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OH}$ là VTPT của (α)

Phương trình mặt phẳng (α) có VTPT $\overrightarrow{OH} = (1;2;3)$, đi qua $H(1;2;3)$ là:

$(\alpha): 1(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0$

$\Leftrightarrow x+2y+3z-14=0$



Chọn D.

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Trong không gian $Oxyz$, cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Gọi $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ lần lượt là các vectơ pháp tuyến của (α_1) và (α_2). Ta có:

Nếu $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ cùng phương thì:

$(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow A_1D_2 = A_2D_1$.

$(\alpha_1) // (\alpha_2) \Leftrightarrow A_1D_2 \neq A_2D_\alpha$

Nếu $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ không cùng phương thì (α_1) và (α_2) cắt nhau.

Chú ý: $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$.

Ví dụ 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 4x-2y+6z-1=0$ và $(Q): 6x-3y+9z-1=0$.

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng đã cho là

A. Cắt nhau. **B.** Trùng nhau. **C.** Song song với nhau. **D.** Vuông góc với nhau.

Cách giải:

Ta có: $\overrightarrow{n_P} = (4;-2;6); \overrightarrow{n_Q} = (6;-3;9)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{n_p} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_p}$ cùng phương

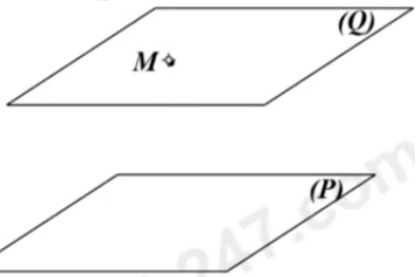
Vì $4 \cdot (-1) \neq 6 \cdot (-1)$ nên $(P) // (Q)$.

Chọn C.

Ví dụ 11: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua M song song với (P).

A. $x-3y+2z-14=0$. **B.** $2x+3y-z-14=0$. **C.** $x-3y+2z+9=0$. **D.** $2x+3y-z=0$.

Cách giải:



Vì mặt phẳng (Q) qua M song song với (P)

Nên $\overrightarrow{n_p}=(1;-3;2)$ là VTPT của (Q)

Phương trình tổng quát: (Q) $x-2-3(y-3)+2(z+1)=0$

$\Leftrightarrow x-3y+2z+9=0$

Chọn C.

Ví dụ 12: Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): x-3y+2z-5=0$ và $(Q): 3x-(m+2)y+(2m-1)z=0$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau khi

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=5$.

Cách giải:

Để $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow \vec{n}_{(P)}\cdot\vec{n}_{(Q)}=0$

Mà $\begin{cases}\vec{n}_{(P)}=(1;-3;2)\\ \vec{n}_{(Q)}=(3;-(m+2);2m-1)\end{cases}$

$\Rightarrow 1\cdot 3+3(m+2)+2\cdot(2m-1)=0$

$\Leftrightarrow 7m+7=0$

$\Leftrightarrow m=-1$

Chọn A.