BÀI GIẢNG: HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC
CHUYÊN ĐỀ: QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN
MÔN: TOÁN 11
GIÁO VIÊN: NGÔ HỒNG QUÂN

MỤC TIÊU

- ✓ *Hiểu được khái niệm hai mặt phẳng vuông góc và điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc trong không gian.*
- ✓ *Nhận biết và vận dụng được dấu hiệu chứng minh hai mặt phẳng vuông góc; biết xác định góc giữa hai mặt phẳng trong một số trường hợp cơ bản.*

1 Góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

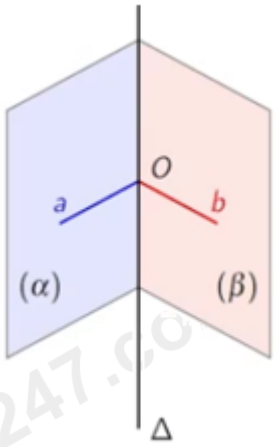
$$\varphi = ((\alpha),(\beta)) = (a,b)$$

trong đó $\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{cases}$

Lưu ý: $0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$.

Câu hỏi: Góc giữa a và b có phụ thuộc vào vị trí của chúng không?

→ Góc giữa a và b **KHÔNG** phụ thuộc vào vị trí của chúng.



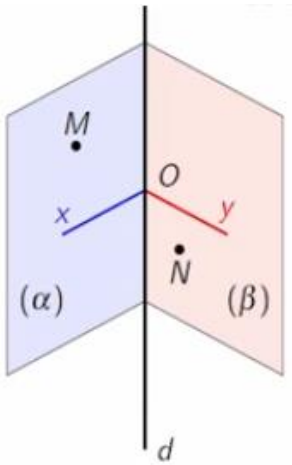
Phương pháp xác định góc giữa hai mặt phẳng

Xét hai mặt phẳng cắt nhau $(\alpha),(\beta)$:

- Xác định giao tuyến $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$.
- Tìm $a \subset (\alpha)$ sao cho $a \perp \Delta$.
- Tìm $b \subset (\beta)$ sao cho $b \perp \Delta$ tại cùng một điểm.
- Góc giữa (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng a và b.

2 Góc nhị diện

Khái niệm: Hình gồm hai nửa mặt phẳng (α) và (β) có chung bờ d gọi là góc nhị diện, kí hiệu $[(\alpha),d,(\beta)]$.



Lưu ý về kí hiệu: Với $M \in (\alpha), N \in (\beta)$, góc nhị diện $[(\alpha),d,(\beta)]$ còn có thể được kí hiệu là $[M, d, N]$

Góc phẳng nhị diện

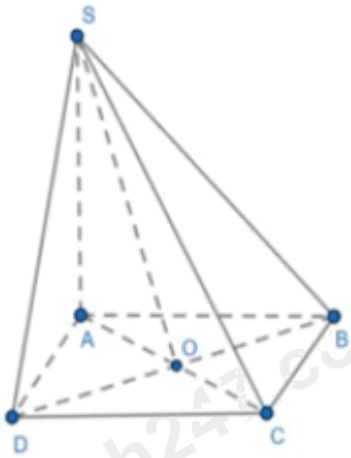
Từ một điểm O bất kỳ trên d, kẻ $Ox \perp d (Ox \subset (\alpha))$ và $Oy \perp d (Oy \subset (\beta))$

Góc xOy gọi là góc phẳng nhị diện.

Phân biệt góc giữa hai mặt phẳng và góc nhị diện

Góc giữa hai mặt phẳng	Số đo góc nhị diện
$0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$	$0^\circ \le \psi \le 180^\circ$

Ví dụ: Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$.



Khi đó,

- Góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ là SOA.

- Góc giữa (SAC) và $(ABCD)$ bằng 90°

- Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S, BD, C]$ là SOC.

- Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S, BD, A]$ là SOA.

- Nếu góc nhị diện $[S, BD, C]$ có số đo là 120° thì góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

3 Hai mặt phẳng vuông góc

Định nghĩa

Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°. Kí hiệu: $(\alpha) \perp (\beta)$.

Định lí (Điều kiện vuông góc)

Nếu mặt phẳng (α) chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

$$\begin{cases} d \subset (\alpha) \\ d \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$

Tính chất quan trọng

Tính chất 1

Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = \Delta \\ a \subset (\alpha), a \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta)$$

Tính chất 2

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

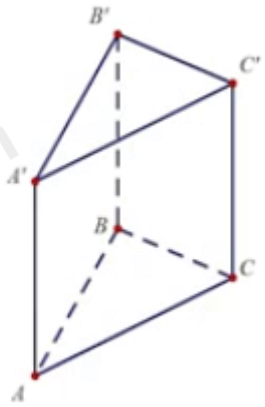
Các khối hình đặc biệt trong không gian

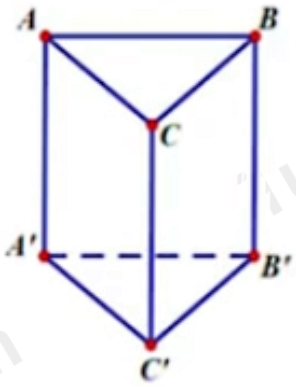
1. Lăng trụ đứng:

- Cạnh bên vuông góc với đáy.
- Các mặt bên là hình chữ nhật.

2. Lăng trụ đều:

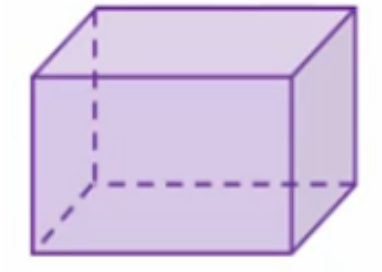
- Là lăng trụ đứng.
- Các mặt đáy là đa giá đều





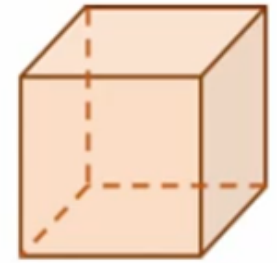
3. Hình hộp chữ nhật:

- 6 mặt đều là hình chữ nhật.



4. Hình lập phương:

- 6 mặt đều là hình vuông.

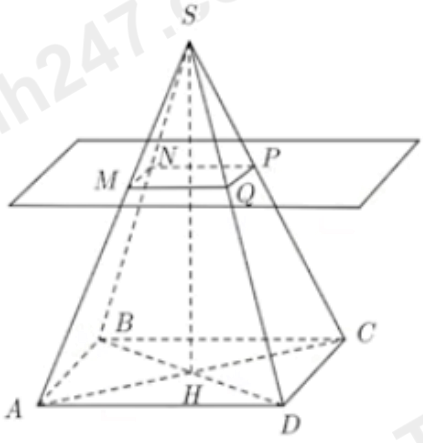


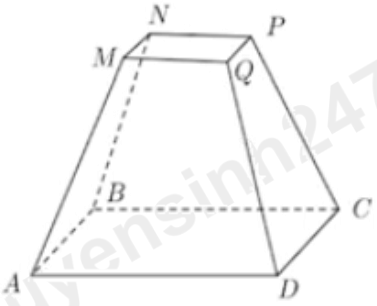
5. Hình chóp đều:

- Đáy là đa giác đều.
- Các cạnh bên bằng nhau.
- Lưu ý: Chân đường cao trùng với tâm đáy.

6. Chóp cụt đều:

- Phần nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy của hình chóp đều.
- Các mặt bên là hình thang cân.





Hình: Hình chóp đều và hình chóp cụt

ĐỀ BÀI

Bài tập 1: Góc giữa hai mặt phẳng

Đề bài: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Bài tập 2: Hai mặt phẳng vuông góc

Đề bài: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA \perp (ABC)$. Gọi M là trung điểm AC. Chứng minh rằng: $(SMB) \perp (SAC)$.

Bài tập 3: Góc nhị diện

Đề bài: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính số đo của góc nhị diện $[B, A'C, D]$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài tập 1: Góc giữa hai mặt phẳng

Đề bài: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Cách giải:

Giao tuyến là BC

Ta có $AB \perp BC$ (đáy là hình vuông).

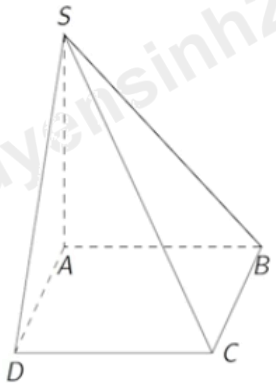
$SB \perp BC$ (do $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$)

$\Rightarrow$ Góc cần tìm là SBA.

- Xét $\triangle SAB$ vuông tại A :

$$\tan SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow SBA = 60^{\circ}$.



Bài tập 2: Hai mặt phẳng vuông góc

Đề bài: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA \perp (ABC)$. Gọi M là trung điểm AC. Chứng minh rằng: $(SMB) \perp (SAC)$.

Cách giải:

- Để CM 2 mặt phẳng vuông góc, ta tìm 1 đường thẳng trong mặt phẳng này vuông góc với mặt phẳng kia.

- Ta sẽ CM: $BM \perp (SAC)$.

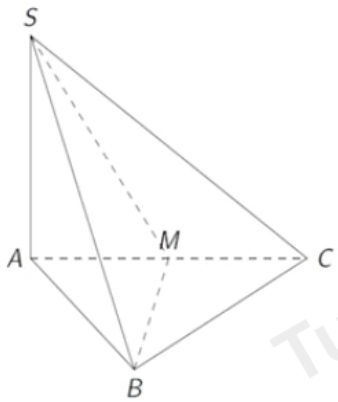
Chứng minh:

- $\triangle ABC$ vuông cân tại B, M là trung điểm $AC \Rightarrow BM \perp AC$.

- $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BM$.

- Từ đó: $BM \perp (SAC)$ (do vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AC, SA)

Mà $BM \subset (SMB) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC)$.



Bài tập 3: Góc nhị diện

Đề bài: Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Tính số đo của góc nhị diện $\left[B, A'C, D\right]$.

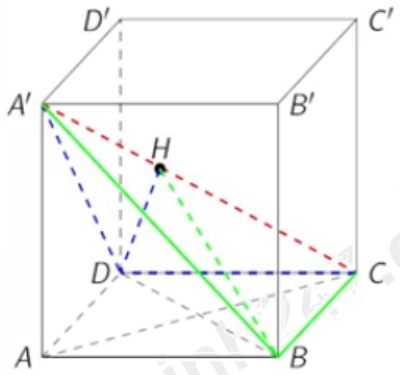
Cách giải:

Giao tuyến là $A'C$. Ta xét hai mặt phẳng $\left(BA'C\right)$ và $\left(DA'C\right)$. Kẻ $BH \perp A'C$.

Vì $BD \perp AC$ và $BD \perp AA'$ nên $BD \perp \left(AA'C\right)$, tức là $BD \perp A'C$. Vậy $(BHD) \perp A'C \Rightarrow DH \perp A'C$.

Góc phẳng nhị diện là BHD.

Đặt độ dài cạnh hình lập phương là a.



Xét tam giác $A'BC$ có:

$$\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{A'B^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{a^2}\Rightarrow BH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Tương tự: $DH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Lại có $BD=a\sqrt{2}$.

- Xét $\triangle BHD: \cos BHD=\frac{BH^2+DH^2-BD^2}{2\cdot BH\cdot DH}=\frac{-1}{2}$

- Kết quả: Số đo của góc nhị diện là 120°.