BÀI GIẢNG: HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC - TIẾT 1
CHUYÊN ĐỀ: QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN
MÔN: TOÁN 11 (KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG)
GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

- ✓ *Nhận biết góc giữa hai đường thẳng.*
- ✓ *Nhận biết hai đường thẳng vuông góc.*
- ✓ *Chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong một số tình huống đơn giản.*
- ✓ *Vận dụng kiến thức về quan hệ vuông góc giữa hai đường thẳng để mô tả một số hình ảnh thực tế.*

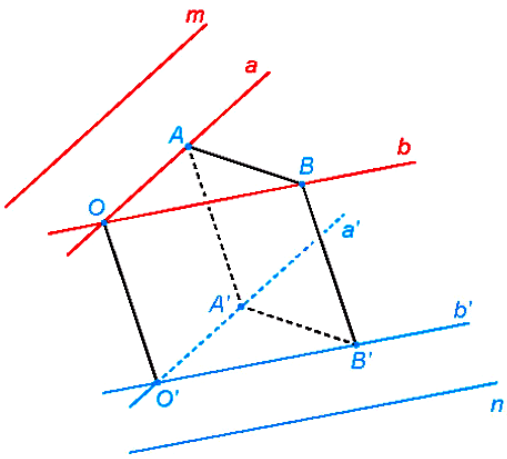
Đối với các nút giao thông cùng mức hay khác mức, để có thể dễ dàng bố trí các nhánh rẽ và để người tham gia giao thông có góc nhìn đảm bảo an toàn, khi thiết kế người ta đều cố gắng đề các tuyến đường tạo với nhau một góc đủ lớn và tốt nhất là góc vuông. Đối với nút giao thông cùng mức, tức là các đường giao nhau, thì góc giữa chúng là góc giữa hai đường thẳng mà ta đã biết. Còn đối với nút giao khác mức, tức là các đường chéo nhau, thì góc giữa chúng được hiểu như thế nào? Bài học này sẽ đề cập tới đối tượng toán học tương ứng.



Hình 7.1. Nút giao (khác mức), Thành phố Hồ Chí Minh (Ảnh: vnexpress.net)

I. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

HĐ1. Trong không gian, cho hai đường thẳng chéo nhau m và n. Từ hai điểm phân biệt O, O' tuỳ ý lần lượt kẻ các cặp đường thẳng a, b và a', b' tương ứng song song với m, n (H.72)



Hình 7.2

a) Mỗi cặp đường thẳng a, a' và b, b' có cùng thuộc một mặt phẳng hay không?

b) Lấy các điểm A, B (khác O) tương ứng thuộc a, b. Đường thẳng qua A song song với OO' cắt a' tại A', đường thẳng qua B song song với OO' cắt b' tại B'. Giải thích vì sao $OAA'O', OBB'O', ABB'A'$ là các hình bình hành.

c) So sánh góc giữa hai đường thẳng a, b và góc giữa hai đường thẳng a',b' (Gợi ý: Áp dụng định lí côsin cho các tam giác OAB, O'A'B')

Cách giải:

a) Mỗi cặp đường thẳng a, a' và b, b' cùng thuộc một mặt phẳng vì a // a', b // b'

b) Ta có:

+) OA // O'A'; OO' // AA' nên OAA'O' là hình bình hành.

+) OB // O'B'; OO' // BB' nên OBB'O' là hình bình hành.

+) AB // A'B' và OO'// AA' ; $OO'//BB'$ suy ra $AA'//B'$ nên $ABB'A'$ là hình bình hành.

c) Áp dụng định lí côsin cho các tam giác O A B và O'A'B', ta có:

$$\cos(a,b)=\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA\cdot OB};\cos\left(a',b'\right)=\frac{O'A'^2+O'B'^2-A'B'^2}{2.O'A'\cdot O'B'}$$

Vì $O'A'=OA$ và $O'B'=OB;AB=A'B'$ nên $\cos(a,b)=\cos\left(a',b'\right)$.

Kết luận:

Góc giữa hai đường thẳng m và n trong không gian, kí hiệu (m,n), là góc giữa hai đường thẳng a và b cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với m và n.

Chú ý

- Để xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b, ta có thể lấy một điểm O thuộc đường thẳng a và qua đó kẻ đường thẳng b' song song với b. Khi đó $(a,b)=\left(a,b'\right)$.

- Với hai đường thẳng a, b bất kì: $0^\circ\le(a,b)\le90^\circ$.

Mở rộng:

$$\cos\left(a,b\right)=\left|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|=\frac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}$$

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}$$

Câu hỏi: Nếu a song song hoặc trùng với a' và b song song hoặc trùng với b' thì (a,b) và $\left(a',b'\right)$ có mối quan hệ gì?

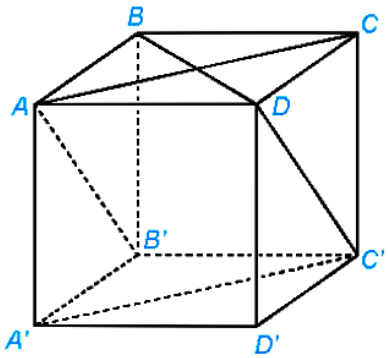
$\Rightarrow$ Nếu a song song hoặc trùng với a' và b song song hoặc trùng với b' thì $(a,b)=\left(a',b'\right)$

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có các mặt là các hình vuông.

Tính các góc $\left(AA',CD\right),\left(A'C',BD\right),\left(AC,DC'\right)$.

Cách giải:

Vì $CD//AB$ nên $\left(AA',CD\right)=\langle AA',AB)=90^\circ$. Tứ giác $ACC'A'$ có các cặp cạnh đối bằng nhau nên nó là một hình bình hành. Do đó, $A'C'//AC$. Vậy $\left(A'C',BD\right)=(AC,BD)=90^\circ$.

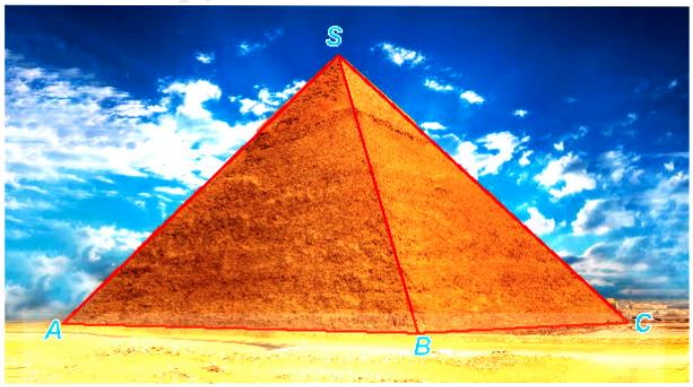


Hình 7.3

Tương tự, $DC' // AB'$. Vậy $(AC, DC') = (AC, AB')$. Tam giác $AB'C$ có ba cạnh bằng nhau (vì là các đường chéo của các hình vuông có độ dài cạnh bằng nhau) nên nó là một tam giác đều. Từ đó, $(AC, DC') = (AC, AB') = 60^\circ$.

Vận dụng. Kim tự tháp Kheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng 230m, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng 219m (kích thước hiện nay). (Theo britannica.com).

Tính (gần đúng) góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp (H.7.4).



Hình 7.4

Cách giải:

Vì AB // CD (ABCD là hình vuông) nên (SC, AB) = (SC, CD)

Xét tam giác SCD có

$$\cos SCD = \frac{SC^2 + CD^2 - SD^2}{2SC \cdot CD} = \frac{219^2 + 230^2 - 219^2}{2.219.230} = \frac{115}{219} \Rightarrow SCD \approx 58,32^0$$

Vậy góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp bằng khoảng $58,32^\circ$.

II. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

HĐ2. Đối với hai cánh cửa trong Hình 7.5, tính góc giữa hai đường mép cửa BC và MN.



Hình 7.5

Cách giải:

Vì BC // PN nên (BC, MN) = (PN, MN)

Mà PN vuông góc với MN nên góc giữa hai đường mép này bằng 90°.

Kết luận:

Hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $a \perp b$, nếu góc giữa chúng bằng 90°.

Câu hỏi: Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b thì a có vuông góc với các đường thẳng song song với b hay không?

$$\left.\begin{array}{l} a \perp b \\ b \parallel c \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp c$$

Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b thì a có vuông góc với các đường thẳng song song với b.

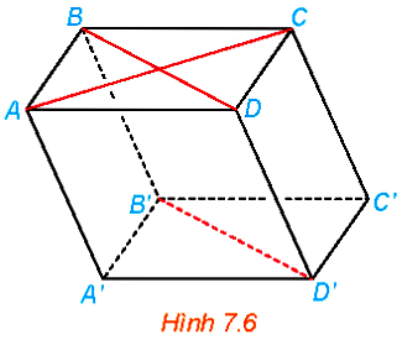
Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ $(H.7.6)$.

a) Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AC và $B'D'$.

b) Chứng minh rằng AC và $B'D'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi ABCD là một hình thoi.

Cách giải:

a) Hai đường thẳng AC và $B'D'$ lần lượt thuộc hai mặt phẳng song song $(ABCD)$ và $\left(A'B'C'D'\right)$ nên chúng không có điểm chung, tức là chúng không thể trùng nhau hoặc cắt nhau.



Hình 7.6

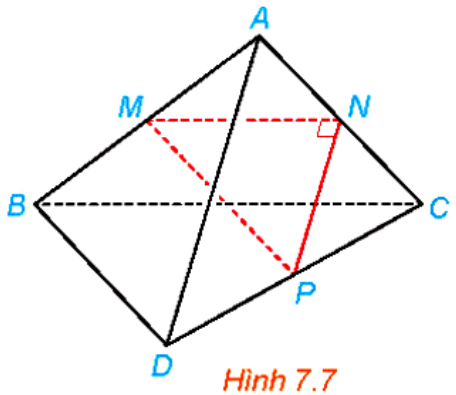
Tứ giác $BDD'B'$ có hai cạnh đối BB' và DD' song song và bằng nhau nên nó là một hình bình hành. Do đó $B'D'$ song song với B D. Mặt khác, BD không song song với AC nên $B'D'$ không song song với AC.

Từ những điều trên suy ra AC và $B'D'$ chéo nhau.

b) Do $B'D'$ song song với BD nên $\left(AC, B'D'\right) = (AC, BD)$. Do đó, AC và $B'D'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi AC và B D vuông góc với nhau. Do vuông góc với BD khi và chi khi ABCD là hình thoi.

Luyện tập. Cho tam giác MNP vuông tại N và một điểm A nằm ngoài mặt phẳng (MNP). Lần lượt lấy các điểm B, C, D sao cho M, N, P tương ứng là trung điểm của AB, AC, CD $(H.7.7)$. Chứng minh rằng AD và BC vuông góc với nhau và chéo nhau.

Cách giải:



Hình 7.7

+) Xét tam giác ABC có

M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC

$\Rightarrow$ MN là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow$ MN || BC

Mà NP $\perp$ MN nên NP $\perp$ BC

Xét tam giác ADC có

N, P lần lượt là trung điểm của AC, CD

$\Rightarrow PN$ là đường trung bình của tam giác A D C

$\Rightarrow$ PN / / AD

Mà NP $\perp$ BC nên AD $\perp$ BC

+) BC / / MN mà $MN \subset (MNP) \Rightarrow BC \,//\, (MNP)$

PN / / AD mà $PN \subset (MNP) \Rightarrow AD \,//\, (MNP)$

Vậy AD và BC chéo nhau.

Tuyensinh247.com