BÀI GIẢNG: QUY TẮC ĐẾM
CHUYÊN ĐỀ: ĐẠI SỐ TỔ HỢP
MÔN: TOÁN 10
GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

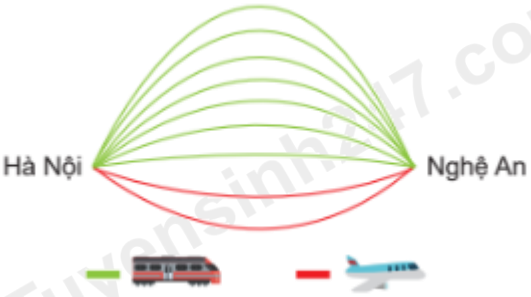
- ✓ *Hiểu các quy tắc đếm.*
- ✓ *Vận dụng các quy tắc đếm vào giải bài toán.*

I. QUY TẮC CỘNG VÀ SƠ ĐỒ HÌNH CÂY

HĐ1. *Chọn chuyến đi* (H.8.1)

Từ Hà Nội vào Nghệ An mỗi ngày có 7 chuyến tàu hỏa và 2 chuyến máy bay. Bạn An muốn ngày Chủ nhật này đi từ Hà Nội và Nghệ An bằng tàu hỏa hoặc máy bay.

Hỏi bạn An có bao nhiêu cách chọn chuyến đi?



Cách giải:

Để đi bằng tàu hỏa bạn An có 7 cách chọn và đi bằng máy bay có 2 cách chọn.

Vậy bạn An có tất cả $7+2=9$ cách chọn.

HĐ2. *Chọn vé tàu* (H.8.2)

Bạn An quyết định mua vé tàu đi từ ga Hà Nội vào ga Vinh trên chuyến tàu SE7. Trên tàu có các toa ghế ngồi và các toa giường nằm. Toa ngồi có hai loại vé: ngồi cứng và ngồi mềm. Toa nằm có loại khoang 4 giường và khoang 6 giường. Khoang 4 giường có hai loại vé: tầng 1 và tầng 2, khoang 6 giường có ba loại vé: tầng 1, tầng 2 và tầng 3. Hỏi:



Hình 8.2

a) Có bao nhiêu loại vé ghế ngồi và bao nhiêu loại vé giường nằm?

b) Có bao nhiêu loại vé để bạn An lựa chọn?

Cách giải:

a) Số vé ghế ngồi là 2 (loại vé)

Số vé giường nằm là $2+3=5$ (loại vé)

b) Số loại vé để bạn An lựa chọn là: $2+5=7$ (loại vé)

Quy tắc cộng:

Giả sử một công việc có thể thực hiện theo một trong hai phương án khác nhau:

- Phương án một có n_1 cách thực hiện.

- Phương án hai có n_2 cách thực hiện (không trùng với bất kì cách thực hiện nào của phương án một)

Khi đó số cách thực hiện công việc sẽ là: $n_1 + n_2$ cách

Chú ý:

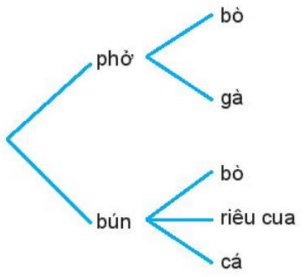
Sơ đồ minh họa cách phân chia trường hợp như trong Hình 8.2 được gọi là sơ đồ hình cây. Trong các bài toán đếm, người ta thường dùng sơ đồ hình cây để minh họa, giúp cho việc đếm thuận tiện và không bỏ sót trường hợp.

Ví dụ 1: Một quán phục vụ ăn sáng có bán phở và bún. Phở có 2 loại là phở bò và phở gà. Bún có 3 loại là bún bò, bún riêu cua và bún cá. Một khách hàng muốn chọn một món để ăn sáng. Vẽ sơ đồ hình cây minh họa và cho biết khách hàng đó có bao nhiêu cách lựa chọn một món ăn sáng.

Cách giải:

Ta có sơ đồ hình cây như hình 8.3

Theo quy tắc cộng, số cách chọn một món ăn sáng là $3+2=5$ (cách)



Hình 8.3

Chú ý:

Ta áp dụng quy tắc cộng cho một công việc có nhiều phương án khi các phương án đó phải rời nhau, không phụ thuộc vào nhau (độc lập với nhau).

Ví dụ 2: Một bộ cờ vua có 32 quân cờ như Hình 8.4

a) Bạn Nam lấy ra tất cả các quân tốt. Hãy đếm xem Nam lấy ra bao nhiêu quân cờ?

b) Bạn Nam lấy ra tất cả các quân cờ trắng và tất cả các quân tốt. Hãy đếm số quân cờ Nam lấy ra.



Hình 8.4

Cách giải:

a) Quân cờ bạn Nam lấy ra có thể thuộc hai loại: màu trắng hoặc màu đen.

- Số quân tốt trắng: 8 quân;
- Số quân tốt đen: 8 quân;

Nam lấy ra: $8+8=16$ (quân cờ).

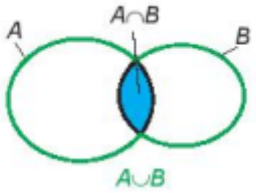
b) Nam lấy ra tất cả các quân trắng và tất cả các quân tốt.

- Đầu tiên ta đếm tất cả các quân trắng, có 16 quân;
- Tiếp theo ta đếm tất cả các quân tốt, có 16 quân tốt.

Vì trong 16 quân tốt có 8 quân tốt trắng đã được đếm nên số quân cờ Nam lấy ra là:

$$16+16-8=24 \text{ (quân cờ)}$$

Nhận xét: Ở câu b), nếu gọi A là tập hợp gồm tất cả các quân cờ trắng, B là tập hợp gồm tất cả các quân tốt thì các quân cờ Nam lấy ra chính là các phần tử của tập hợp $A \cup B$. Nếu ta áp dụng quy tắc cộng: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 32$ (quân cờ), suy ra Nam lấy ra 32 quân cờ. Kết luận khi đó là sai, vì $A \cap B \neq \varnothing$ nên ta không thể áp dụng quy tắc cộng để tính trong trường hợp này.



Luyện tập 1. Có bao nhiêu số tự nhiên từ 1 đến 30 mà không nguyên tố cùng nhau với 35?

Chú ý: Hai số tự nhiên a, b gọi là nguyên tố cùng nhau nếu chúng có ước chung lớn nhất là 1.

Cách giải:

- Không nguyên tố cùng nhau tức là có ước chung khác 1
- Mà $35 = 5.7$ nên ta tìm các số chia hết cho 5 hoặc 7

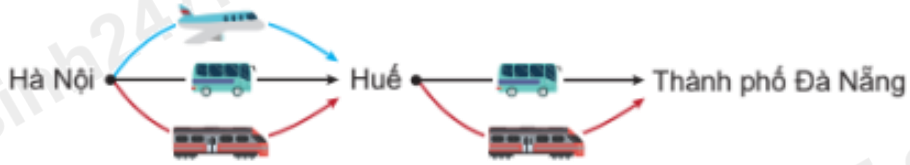
Từ 1 đến 30 có:

- Có 6 số chia hết cho 5 là: 5, 10, 15, 20, 25, 30
- Có 4 số chia hết cho 7 là: 7, 14, 21, 28

Có tất cả $6 + 4 = 10$ số tự nhiên không nguyên tố cùng nhau với 35

II. QUY TẮC NHÂN

HĐ3. Thầy Trung muốn đi từ Hà Nội vào Huế, rồi từ Huế vào thành phố Đà Nẵng. Biết rằng từ Hà Nội vào Huế có thể đi bằng 3 cách: ô tô, tàu hỏa hoặc máy bay. Còn từ Huế vào thành phố Đà Nẵng có thể đi bằng 2 cách: ô tô hoặc tàu hỏa (H.8.5)



Hình 8.5

Hỏi thầy Trung có bao nhiêu cách chọn các phương tiện để đi từ Hà Nội vào thành phố Đà Nẵng?

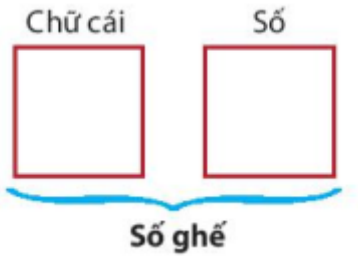
Cách giải:

Đi tử Hà Nội vào Huế, rồi từ Huế vào thành phố Đà Nẵng có các cách là:

1. Máy bay>>ô tô	2. Máy bay>>tàu hỏa
3. Ô tô>>ô tô	4. Ô tô>>tàu hỏa
5. Tàu hỏa>>ô tô	6. Tàu hỏa>>tàu hỏa

HĐ4. Để lắp ghế vào một phòng chiếu phim, các ghế được gắn nhãn bằng một chữ cái in hoa (trong bảng chữ cái tiếng Anh từ A đến Z) đứng trước và một số nguyên từ 1 đến 20, chẳng hạn X15, Z2, …

Hỏi có thể gắn nhãn tối đa được bao nhiêu ghế?



Cách giải:

Để gắn nhãn cho các ghế ta chọn 1 chữ cái in hoa và 1 số. Số cách chọn chữ cái in hoa có 26 cách (ứng với 26 chữ)

Số cách chọn chữ cái in hoa có 26 cách (ứng với 26 chữ)

Số cách chọn chữ số nguyên từ 1 đến 20 có 20 cách

Vậy số ghế gắn nhãn tối đa là $26.20 = 520$ (ghế)

Ta nhận thấy muốn làm một việc có hai công đoạn lần lượt thì trước hết ta xem xét xem công đoạn một có bao nhiêu cách, sau đó với mỗi cách của công đoạn một, ta tính xem công đoạn hai có bao nhiêu cách. Khi đó số cách thực hiện công việc tính theo quy tắc sau:

Quy tắc nhân

Giả sử một công việc nào đó phải hoành thành qua hai công đoạn liên tiếp nhau:

- Công đoạn một có m_1 cách thực hiện

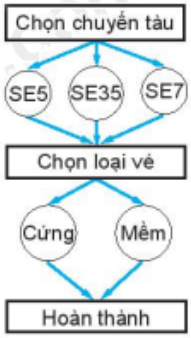
- Với mỗi cách thực hiện công đoạn một, có m_2 cách thực hiện công đoạn hai

Khi đó số cách thực hiện công việc là: $m_1.m_2$ cách

Chú ý:

Quy tắc nhân áp dụng để tính số cách thực hiện một công việc có nhiều công đoạn, các công đoạn nối tiếp nhau và những công đoạn này độc lập với nhau.

Ví dụ 3: Một người muốn mua vé tàu ngồi đi từ ga Hà Nội vào ga Vinh. Có ba chuyến tàu là SE5, SE7 và SE35. Trên mỗi tàu có 2 loại vé ngồi khác nhau: ngồi cứng hoặc ngồi mềm. Hỏi có bao nhiêu loại vé ngồi khác nhau để người đó lựa chọn?



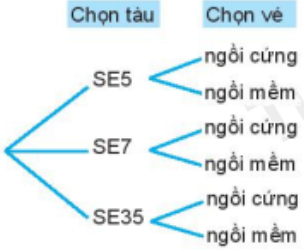
Cách giải:

Để mua được vé tàu, người đó phải thực hiện hai công đoạn:

Chọn chuyến tàu → Chọn loại vé

Có 3 cách chọn chuyến tàu, với mỗi chuyến tàu có 2 cách chọn loại vé ngồi.

Áp dụng quy tắc nhân, ta có số cách chọn loại vé là $3.2 = 6$ (cách)



Chú ý. Ta cũng có thể dùng quy tắc cộng. Người mua vé có thể lựa chọn một trong ba trường hợp: SE5, SE7 hoặc SE35.

Nếu lựa chọn SE5, có hai loại vé: loại vé SE5 ngồi cứng và SE5 ngồi mềm. Tương tự cho trường hợp SE7 và trường hợp SE35.

Mỗi trường hợp có hai loại vé. Tổng cộng có:

$$2+2+2=6 \text{ (cách chọn loại vé)}$$

Luyện tập 2. Tại kì World Cup năm 2018, vòng bảng gồm có 32 đội tham gia, được chia vào 8 bảng, mỗi bảng 4 đội thi đấu vòng tròn (mỗi đội chơi một trận với từng đội khác trong cùng bảng). Hỏi tổng cộng vòng bảng có bao nhiêu trận đấu?

Cách giải:

- Mỗi bảng 4 đội thi đấu vòng tròn, giả sử gọi các đội là A, B, C, D

Các trận đấu là A-B, A-C, A-D, B-C, B-D, C-D

Suy ra có tất cả 6 trận đấu trong cùng bảng

- Có 8 bảng khác nhau

- Tổng cộng vòng bảng có số trận đấu là $6.8=48$ (trận đấu)

III. KẾT HỢP QUY TẮC CỘNG VÀ QUY TẮC NHÂN

Trong các ví dụ trước, chúng ta chỉ cần áp dụng một quy tắc đếm. Tuy nhiên, hầu hết các bài toán đếm trong thực tế sẽ phức tạp hơn và thường phải áp dụng cả hai quy tắc.

Ví dụ 4: Để tổ chức bữa tiệc, người ta chọn thực đơn gồm một món khai vị, một món chính và một món tráng miệng. Nhà hàng đưa ra danh sách: khai vị có 2 loại súp và 3 loại sa lát; món chính có 4 loại thịt, 3 loại cá và 3 loại tôm; tráng miệng có 5 loại kem và 3 loại bánh. Hỏi có thể thiết kế bao nhiêu thực đơn khác nhau?

Cách giải:

Để chọn thực đơn, ta chia thành 3 công đoạn chọn món.

Công đoạn 1, chọn món khai vị: vì có hai phương án là súp hoặc sa lát nên ta áp dụng quy tắc cộng. Số cách chọn là $2+3=5$ (cách)

Công đoạn 2, chọn món chính: tương tự, ta có số cách chọn là $4+3+3=10$ (cách)

Công đoạn 3, chọn món tráng miệng: tương tự, ta có số cách chọn là $5+3=8$ (cách)

Tổng kết, theo quy tắc nhân, số cách chọn thực đơn là $5.10.8=400$ (cách)

Chú ý: Quy tắc cộng được áp dụng khi công việc được chia thành các phương án phân biệt (thực hiện một trong các phương án để hoàn thành công việc)

Quy tắc nhân được áp dụng khi công việc có nhiều công đoạn nối tiếp nhau (phải thực hiện tất cả các công đoạn để hoàn thành công việc).

Luyện tập 3. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3 có thể lập được bao nhiêu số thỏa mãn:

a) Là số tự nhiên có ba chữ số khác nhau?

b) Là số tự nhiên chẵn có ba chữ số khác nhau?

Cách giải:

a) Gọi số cần tìm là $\overline{abc}, (a \neq 0)$

- a có 3 cách chọn $(a \neq 0)$

- b có 3 cách chọn $(b \neq a)$

- c có 2 cách chọn $(c \neq a, c \neq b)$

Vậy theo quy tắc nhân có tất cả $3.3.2 = 18$ số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau được lập từ 0, 1, 2, 3

b) Gọi số cần tìm là $\overline{abc}, (a \neq 0)$

- Trường hợp 1: $c = 0$ khi đó a có 3 cách chọn $(a \neq 0)$

b có 2 cách chọn $(b \neq a, b \neq c)$

Có tất cả $1.2.3 = 6$ số thỏa mãn.

- Trường hợp 2: $c = 2$ khi đó a có 2 cách chọn $(a \neq 0, a \neq c)$

b có 2 cách chọn $(b \neq a, b \neq c)$

Có tất cả $1.2.2 = 4$ số thỏa mãn

Vậy có thể lập được $6 + 4 = 10$ số tự nhiên chẵn có ba chữ số khác nhau.

Ví dụ 5: Trở lại tình huống mở đầu. Mỗi mật khẩu của một trang web là một dãy có từ 2 đến 3 kí tự, trong đó kí tự đầu tiên là một trong 26 chữ cái in thường trong bảng chữ cái tiếng Anh (từ a đến z), mỗi kí tự còn lại là một chữ số từ 0 đến 9. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu mật khẩu khác nhau?

Cách giải:

Ta thấy có hai trường hợp: độ dài của mật khẩu là 2 hoặc 3 kí tự.

- Trường hợp 1: độ dài mật khẩu là 2 kí tự. Chọn từng kí tự và áp dụng quy tắc nhân.

Kí tự đầu tiên có 26 cách chọn trong các chữ cái in thường tiếng Anh

Kí tự thứ hai có 10 cách chọn trong các chữ số từ 0 đến 9

Vậy theo quy tắc nhân, ta có $26.10 = 260$ cách chọn mật khẩu trong trường hợp 1.

- Trường hợp 2: độ dài mật khẩu là 3 kí tự

Tương tự như trường hợp 1, ta có $26.10^2 = 2600$ cách chọn mật khẩu

Vì có hai trường hợp rời nhau, mật khẩu có thể rơi vào một trong hai trường hợp, nên ta áp dụng quy tắc cộng. Tổng số mật khẩu có thể là $260 + 2600 = 2860$

Vận dụng. Khối lớp 10 của một trường trung học phổ thông có ba lớp 10A, 10B, 10C. Lớp 10A có 30 bạn, lớp 10B có 35 bạn, lớp 10C có 32 bạn. Nhà trường muốn chọn 4 bạn để thành lập đội cờ đỏ của khối sao cho đủ đại diện của các lớp. Hỏi có bao nhiêu cách để lựa chọn?

Cách giải:

TH1: 2 bạn lớp 10A, 1 bạn lớp 10B, 1 bạn lớp 10C có số cách chọn là $30.29.35.32 = 974400$ (cách)

TH2: 1 bạn lớp 10A, 2 bạn lớp 10B, 1 bạn lớp 10C có số cách chọn là $30.35.34.32 = 1142400$ (cách)

TH3: 1 bạn lớp 10A, 1 bạn lớp 10B, 2 bạn lớp 10C có số cách chọn là $30.35.32.31 = 1041600$ (cách)

Vậy số cách lựa chọn là $974400 + 1142400 + 1041600 = 3158400$ (cách)