BÀI GIẢNG: ÔN TẬP CHỦ ĐỀ: ĐẠO HÀM
CHUYÊN ĐỀ: ĐẠO HÀM
MÔN: TOÁN 11
GIÁO VIÊN: NGÔ HỒNG QUÂN

MỤC TIÊU

- ✓ *Nhớ và vận dụng chính xác bảng công thức đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản, các quy tắc tính đạo hàm*
- ✓ *Áp dụng đạo hàm để giải các bài toán liên quan đến thực tế.*

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1 Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

2 Quy tắc tính đạo hàm

- Tích: $(u\cdot v)'=u'v+uv'$
- Thương: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq 0)$
- Đạo hàm hàm hợp: $y'(x)=y'(u)\cdot u'(x)$

3 Đạo hàm của các hàm số cơ bản

Đạo hàm hàm đa thức và căn thức

- Hằng số và biến số: $(C)'=0\quad;\quad(x)'=1$
- Hàm lũy thừa: $\left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}\quad;\quad\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}\quad(x\neq 0)$
- Hàm căn bậc hai: $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\quad(x>0)$

Đạo hàm hàm lượng giác, mũ và logarit

- Lượng giác: $(\sin x)'=\cos x\quad;\quad(\cos x)'=-\sin x$
- Lượng giác: $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}\quad;\quad(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- Hàm số mũ: $\left(e^x\right)'=e^x\quad;\quad\left(a^x\right)'=a^x\ln a$
- Hàm số logarit: $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\quad;\quad\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

4 Ý nghĩa hình học

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0, y_0)$ có hệ số góc $k = f'(x_0)$:

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + y_0$$

5 Ý nghĩa cơ học và tốc độ thay đổi

a) Xét chuyển động có phương trình quãng đường $S = S(t)$:

- Vận tốc tức thời: $v(t) = S'(t)$
- Gia tốc tức thời: $a(t) = v'(t) = S''(t)$

b) Tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng y theo x là $f'(x)$.

ĐỀ BÀI

Dạng 1: Điều kiện tồn tại đạo hàm

Đề bài: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{khi } x \ge 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Để hàm số có đạo hàm tại $x = 1$ thì a bằng bao nhiêu?

Dạng 2 & 3: Tính đạo hàm cơ bản và hàm hợp

Bài tập: Tính đạo hàm các hàm số sau:

(1) $y = 3\sin x - 4\cos x + 5e^x$

(2) $y = \ln\left(x^2 + 4x + 5\right)$

Dạng 4: Viết phương trình tiếp tuyến (Phần 1)

Đề bài: Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi d là tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $\Delta : y = \dfrac{1}{3}x + 2$. Cho d cắt trục tung tại điểm có tung độ dương và có phương trình dạng $y = ax + b$. Tính $P = a + b$.

Dạng 5: Bài toán chuyển động

Đề bài: Quãng đường di chuyển của một hạt vĩ mô dọc theo một trục tọa độ được mô hình hóa bởi phương trình $s(t) = \left(t^2 - 2t + 2\right)e^t$, trong đó t (giây) là thời gian và $s(\text{cm})$ là quãng đường. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm vận tốc của hạt đó bằng e, biết rằng khi đó hạt đã chuyển động.

Dạng 6: Bài toán thực tế: tốc độ thay đổi tức thời

Đề bài: Một cái thang dài 6 m kê dựa vào một bức tường thẳng đứng. Chân thang trượt ra xa tường với tốc độ $2\,\text{m/s}$. Tính tốc độ trượt xuống của đầu thang tại thời điểm đầu thang cách mặt đất 3 m .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1: Điều kiện tồn tại đạo hàm

Đề bài: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & \text{khi } x\geq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } x<1 \end{cases}$. Để hàm số có đạo hàm tại $x=1$ thì a bằng bao nhiêu?

Cách giải:

Hàm số liên tục tại $x=1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow a+b=1.$

Đạo hàm trái: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-2}{x-1}=2.$

Đạo hàm phải: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\left(ax^2+bx\right)-(a+b)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{a\left(x^2-1\right)+b(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+} a(x+1)+b=2a+b.$

Để tồn tại đạo hàm tại $x=1: 2a+b=2.$

Giải hệ: $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=2 \end{cases}\Rightarrow a=1, b=0.$

Dạng 2 & 3: Tính đạo hàm cơ bản và hàm hợp

Bài tập: Tính đạo hàm các hàm số sau:

(1) $y=3\sin x-4\cos x+5e^x$

(2) $y=\ln\left(x^2+4x+5\right)$

Cách giải:

(1) Dùng quy tắc tổng/hiệu và đạo hàm lượng giác, mũ:

$y'=3(\cos x)-4(-\sin x)+5e^x=3\cos x+4\sin x+5e^x$

(2) Áp dụng đạo hàm hàm hợp $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$:

$y'=\dfrac{\left(x^2+4x+5\right)'}{x^2+4x+5}=\dfrac{2x+4}{x^2+4x+5}$

Dạng 4: Viết phương trình tiếp tuyến (Phần 1)

Đề bài: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi d là tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y=\dfrac{1}{3}x+2$. Cho d cắt trục tung tại điểm có tung độ dương và có phương trình dạng $y=ax+b$. Tính $P=a+b$.

Cách giải:

TXD: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Dạo hàm: $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$.

Vì tiếp tuyến $d\perp\Delta: y=\dfrac{1}{3}x+2$ nên hệ số góc k_d của d thỏa mãn: $k_d\cdot\dfrac{1}{3}=-1\Rightarrow k_d=-3$.

Gọi $(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Ta có phương trình: $y'(x_0)=-3$

$$\Leftrightarrow\frac{-3}{(x_0-1)^2}=-3\Leftrightarrow(x_0-1)^2=1$$

Giải phương trình $\Leftrightarrow\dfrac{-3}{(x_0-1)^2}=-3\Leftrightarrow(x_0-1)^2=1$ ta được: $\left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y_0=5\\x_0=0\Rightarrow y_0=-1\end{array}\right.$

- Trường hợp 1: $x_0=2;y_0=5$

$\Rightarrow d: y=-3(x-2)+5\Leftrightarrow y=-3x+11$. (Nhận vì d cắt trục Oy tại điểm có tung độ $11>0$).

- Trường hợp 2: $x_0=0;y_0=-1$

$\Rightarrow d: y=-3(x-0)-1\Leftrightarrow y=-3x-1$. (Loại vì tung độ giao điểm là $-1<0$).

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=-3x+11\Rightarrow a=-3,b=11$.

Kết luận: $P=a+b=-3+11=8$.

Dạng 5: Bài toán chuyển động

Đề bài: Quãng đường di chuyển của một hạt vĩ mô dọc theo một trục tọa độ được mô hình hóa bởi phương trình $s(t)=\left(t^2-2t+2\right)e^t$, trong đó t (giây) là thời gian và $s(\text{cm})$ là quãng đường. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm vận tốc của hạt đó bằng e, biết rằng khi đó hạt đã chuyển động.

Cách giải:

Tính vận tốc $v(t)=s'(t)=\left(t^2-2t+2\right)'e^t+\left(t^2-2t+2\right)\left(e^t\right)'=(2t-2)e^t+\left(t^2-2t+2\right)e^t=t^2e^t$.

Thời điểm $v(t)=e: t^2e^t=e$.

Dễ thấy $t=1$.

Tính gia tốc: $a(t)=v'(t)=\left(t^2e^t\right)'=2te^t+t^2e^t=\left(t^2+2t\right)e^t$.

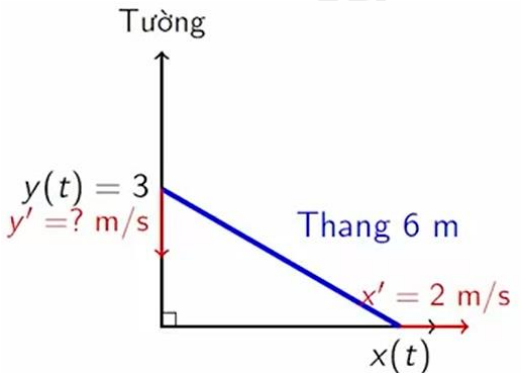
Gia tốc tại $t=1: a(1)=\left(1^2+2\cdot1\right)e^1=3e\approx8{,}16\left(\text{m}/\text{s}^2\right)$.

Dạng 6: Bài toán thực tế: tốc độ thay đổi tức thời

Đề bài: Một cái thang dài 6 m kê dựa vào một bức tường thẳng đứng. Chân thang trượt ra xa tường với tốc độ $2\,\text{m}/\text{s}$. Tính tốc độ trượt xuống của đầu thang tại thời điểm đầu thang cách mặt đất 3 m .

Cách giải:

Gọi $x(t), y(t)$ lần lượt là khoảng cách từ chân tường đến chân thang và từ mặt đất đến đầu thang tại thời điểm t (giây). $(x, y > 0)$.



Theo định luật Pythagoras: $x^2 + y^2 = 6^2 = 36$

Đạo hàm hai vế của (1) theo thời gian t :

$$2x \cdot x' + 2y \cdot y' = 0 \Leftrightarrow x \cdot x' + y \cdot y' = 0 \quad (1)$$

Có: $y = 3\text{m}$. Như vậy $x^2 + 3^2 = 36 \Rightarrow x = 3\sqrt{3}\,\text{m}$.

Thay $x = 3\sqrt{3}, y = 3$ và $x' = 2$ vào (2):

$$(3\sqrt{3}) \cdot 2 + 3 \cdot y' = 0 \Rightarrow 3y' = -6\sqrt{3} \Rightarrow y' = -2\sqrt{3}\,\text{m/s}$$

Kết luận: Tốc độ đầu thang trượt xuống là $v = |y'| = 2\sqrt{3} \approx 3,46\,\text{m/s}$.

Lưu ý: Dấu trừ thể hiện đầu thang đang trượt xuống.