BÀI GIẢNG: TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (TIẾT 1)
CHUYÊN ĐỀ: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ
MÔN: TOÁN 12

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH ĐĂNG

MỤC TIÊU

- ✓ *Hiểu và phát biểu được các điều kiện xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số bằng đạo hàm.*
- ✓ *Xác định được các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị của hàm số thông qua bảng xét dấu đạo hàm.*

I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Một doanh nghiệp dự kiến lợi nhuận khi sản xuất x sản phẩm $(0 \le x \le 300)$ được cho bởi hàm số $y = -x^3 + 300x^2$ (đơn vị: đồng) và được minh họa bằng đồ thị sau.



Trong khoảng giá trị nào của x thì lợi nhuận tăng dần, giảm dần?

Liên hệ sự thay đổi lợi nhuận và dấu của đạo hàm y' ?

1 Khái niệm tính đơn điệu của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

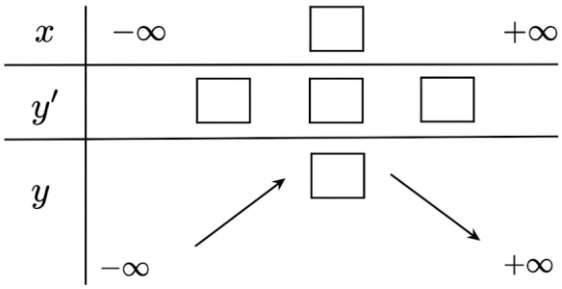
Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến** trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến** trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Chú ý:

- Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên K còn được gọi là đơn điệu trên K.
- Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi LÊN từ trái sang phải.
- Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi XUỐNG từ trái sang phải.

VD1. Xét hàm số: $y = -x^2 + 2$. Hoàn thành bảng sau:



Cách giải:

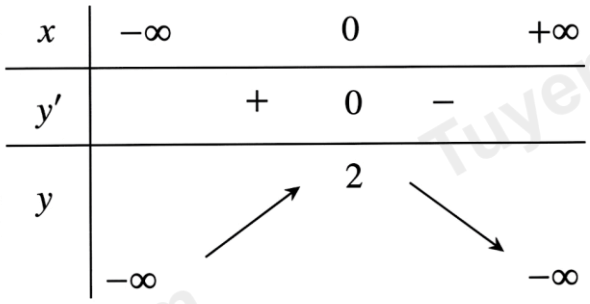
$y' = -2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Tại $x = 0 \Rightarrow y = 2$

Với $x < 0 : y' = -2x > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến

Với $x > 0 : y' = -2x < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến

Bảng biến thiên:



Định lí

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì $y = f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì $y = f(x)$ nghịch biến trên K.

Chú ý:

- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì $y = f(x)$ không đổi trên K.
- Định lí trên vẫn đúng trong trường hợp $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm trong khoảng K.

2 Sử dụng bảng biến thiên xét tính đơn điệu của hàm số

Để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4: Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

VD2: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

Cách giải:

Bước 1: Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Bước 2: $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \ (\in D) \\ x = 1 \ (\in D) \end{array}\right.$

Bước 3: Bảng biến thiên:

Với $x \in (1;+\infty)$. Cho $x = 3 \Rightarrow y' > 0$

$x \in (-1;1)$. Cho $x = 0 \Rightarrow y' < 0$

$x \in (-\infty;1)$. Cho $x = -2 \Rightarrow y' > 0$

Tại $x = -1$ thay vào $y = x^3 - 3x + 2$ ta được $y = 4$

Tại $x = 1$ thay vào $y = x^3 - 3x + 2$ ta được $y = 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Bước 4: Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$

LUYỆN TẬP

Bài tập 1: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

a. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ b. $y = x^4 - 2x^2 + 2$ c. $y = \dfrac{-x^2 + x - 7}{x - 2}$

d. $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x - 2$ e. $y = \sqrt{4 - x^2}$ f. $y = \log_3\left(2x^2 - 4x + 7\right)$

Bài tập 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

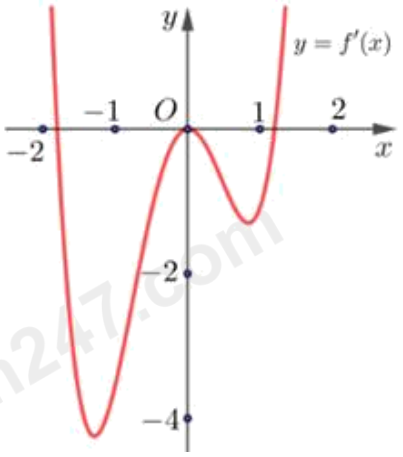
A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số nghich biến trên khoảng $(0;2)$.

Bài tập 3: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$. Hỏi trong khoảng $(a;b)$ có bao nhiêu giá trị nguyên.



HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài tập 1: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

a. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ b. $y=x^4-2x^2+2$ c. $y=\dfrac{-x^2+x-7}{x-2}$

d. $y=\dfrac{1}{3}x^3+3x^2-7x-2$ e. $y=\sqrt{4-x^2}$ f. $y=\log_3\left(2x^2-4x+7\right)$

Cách giải:

Ta có $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

a. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

TXD: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0 \quad \forall x\in D$

Bảng giá trị:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	1

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$ trên từng khoảng xác định

b. $y=x^4-2x^2+2$

$y' = 4x^3 - 4x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

$-$	-1	$+$	0	$-$	1	$+$

Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$

c. $y = \dfrac{-x^2 + x - 7}{x - 2}$

* $\left(\dfrac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}\right)' = \dfrac{Tx^2 + 2Dx + E}{MS^2}$

Với $T = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D = \begin{vmatrix} a_1 & c_2 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $E = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Áp dụng $y = \dfrac{-x^2 + x - 7}{x - 2}$

TXD: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$y' = \dfrac{-x^2 + 4x + 5}{(x-2)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 5 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	-9	$\searrow$ $-\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-1;2)$ và $(2;5)$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(5;+\infty)$

d. $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x - 2$

$y' = x^2 + 6x - 7$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -7 \end{array}\right.$

+	−7	−	1	+

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-7)$ và $(1;+\infty)$

Hàm số nghịch biến trên $(-7;1)$

e. $y=\sqrt{4-x^2}$

TXD: $D=[-2;2]$

$y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

$y'=0\Leftrightarrow x=0\ (\in D)$

Bảng biến thiên:

x	-2		0		2
y'	‖	+	0	−	‖
y	‖ 0	↗	2	↘	‖ 0

Hàm số đồng biến trên $(-2;0)$

Hàm số nghịch biến trên $(0;2)$

f. $y=\log_3\left(2x^2-4x+7\right)$

TXD: $D=\mathbb{R}$

$y'=\dfrac{4x-4}{\left(2x^2-4x+7\right)\cdot\ln 3}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=1$

Bảng xét dấu:

−	1	+

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$

Bài tập 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số nghich biến trên khoảng $(0;2)$.

Cách giải:

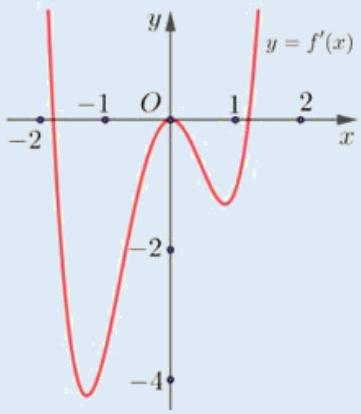
Dựa vào bảng xét dấu ta có:

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$ và $(0;2)$

Chọn D.

Bài tập 3: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$. Hỏi trong khoảng $(a;b)$ có bao nhiêu giá trị nguyên.



Cách giải:

Ta có đồ thị hàm số $y=f'(x)<0$ tại $(-2;1)$ (phía dưới trục hoành)

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.

Trong khoảng $(-2;1)$ có 3 giá trị nguyên là: $\{-1;0;1\}$.