BÀI GIẢNG: TỔNG ÔN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
CHUYÊN ĐỀ: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
MÔN TOÁN 12
GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

- ✓ *Hệ thống hóa toàn bộ định lý, điều kiện chứng minh đường thẳng và mặt phẳng vuông góc.*
- ✓ *Thành thạo các phương pháp xác định, tính toán góc và khoảng cách trong hình học không gian.*
- ✓ *Phát triển khả năng tưởng tượng hình khối và rèn luyện lập luận logic, chính xác khi giải đề.*

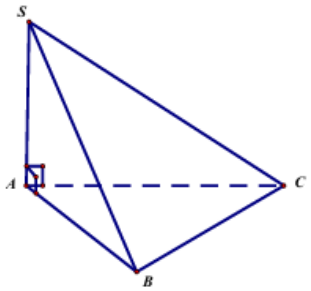
ĐỀ BÀI

PHẦN I: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng BC'?

A. A'D. **B.** AC. **C.** BB'. **D.** AD'.

Câu 2: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ dưới).



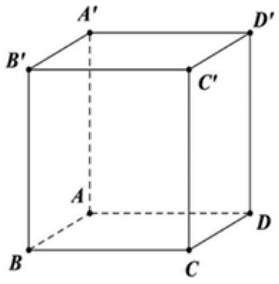
Khi đó số đo góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) là

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu của A lên BD và K là hình chiếu của A lên SD. Góc phẳng nhị diện [S, BD, A] là

A. SKA. **B.** SBA. **C.** SHA. **D.** SDA.

Câu 4: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' (tham khảo hình vẽ).



Góc giữa hai đường thẳng AC và C'D' bằng góc

A. $AD'C$. **B.** BCD. **C.** $AC'D$. **D.** ACD.

Câu 5: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp AB$, $SA \perp AC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $SA \perp (SBC)$. **B.** $SA \perp (ABC)$. **C.** $SA \perp (SAB)$. **D.** $SA \perp (SAC)$.

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $SD \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $AD \perp (SCD)$. **B.** $BC \perp (SAB)$. **C.** $AC \perp (SBD)$. **D.** $AB \perp (SBC)$.

Câu 7: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$. Gọi I là trung điểm của SA, G là trọng tâm tam giác ABC. Hình chiếu của đường thẳng IG trên mặt phẳng (ABC) là

A. đường thẳng AB. **B.** đường thẳng BC. **C.** đường thẳng AC. **D.** đường thẳng AG.

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng vuông góc với (SAC) là

A. (SAB). **B.** (SBD). **C.** (SBC). **D.** (SAD).

Câu 9: Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy S = 12 và chiều cao h = 4 là

A. V = 24. **B.** V = 3. **C.** V = 16. **D.** V = 48.

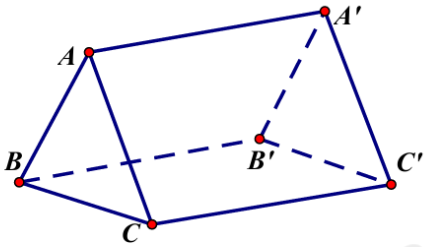
Câu 10: Chiều cao của khối chóp có thể tích V và diện tích S là

A. $h = \frac{S}{V}$. **B.** $h = \frac{3S}{V}$. **C.** $h = \frac{V}{S}$. **D.** $h = \frac{3V}{S}$.

Câu 11: Một tháp chuông có hình dạng là hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy dài 6m, cạnh bên dài 15m. Chiều cao của tháp chuông bằng

A. $3\sqrt{21}m$. **B.** $3\sqrt{17}m$. **C.** $6\sqrt{6}m$. **D.** $3\sqrt{23}m$.

Câu 12: Một cái lều ở trại hè có dạng hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C'. Cho biết AB = AC = 2m; BC = 3,2m; AA' = 5m. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và B'C'.



A. 1,2m. **B.** 2m. **C.** 3,2m. **D.** 5m.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi AH, AK lần lượt là đường cao của $\Delta SAB, \Delta SAC$.

a) $(SC, (ABC)) = 45^\circ$.

b) $(SBC) \perp (SAB)$.

c) $(AHK) \perp (SBC)$.

d) $(AK, (SBC)) = 60^\circ$.

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD với đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC.

a) $(SMN) \perp (ABCD)$.

b) $(SMN) \perp (SAD)$.

c) $((SBC);(ABCD)) = 30^\circ$.

d) $((SBC);(SCD)) \approx 81^\circ$.

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy.

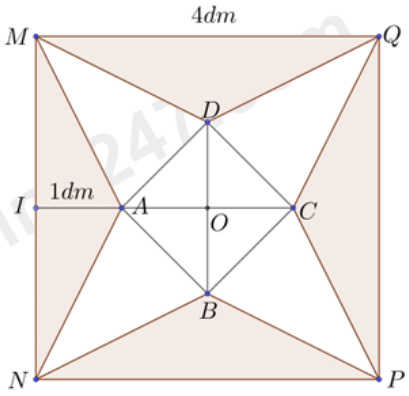
a) Chiều cao hình chóp bằng a.

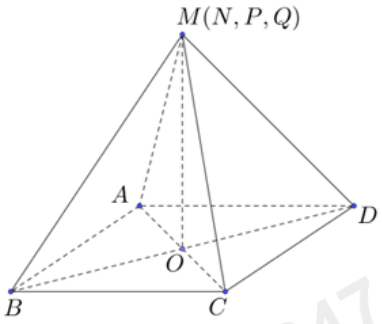
b) Thể tích khối chóp bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$.

c) Khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB) bằng a.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $\sqrt{2}a$.

Câu 4: Từ một tấm tôn hình vuông MNPQ có cạnh bằng 4 dm, người ta cắt tấm tôn theo các tam giác cân MAN, NBP, PCQ, QDM bằng nhau sau đó gò các tam giác cân ABN, BCP, CDQ, DAM sao cho các đỉnh M, N, P, Q trùng nhau để được khối chóp tứ giác đều có đáy là tứ giác ABCD. Biết đường cao kẻ từ A của tam giác MAN bằng 1 dm.





a) Cạnh đáy của hình chóp đều được tạo ra bằng 2 dm.

b) Cạnh bên của hình chóp đều được tạo ra bằng $\sqrt{5}$ dm.

c) Chiều cao của hình chóp đều được tạo ra bằng 2 dm.

d) Thể tích khối chóp đều được tạo ra bằng $\frac{4}{3}$ dm^3.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

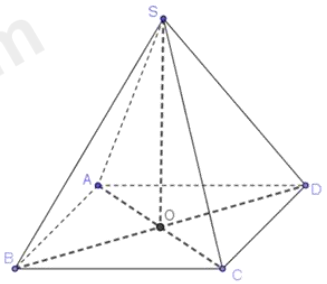
Câu 1: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính giá trị của $\cos(AB', CD')$.

Câu 2: Độ dốc của con đường thẳng là tang của góc tạo bởi mặt phẳng chứa mặt con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$. Hỏi

theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 3: Bạn An muốn làm một chiếc đèn lồng bằng gỗ hình chóp tứ giác đều, có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng 20 cm như hình vẽ, được mô hình hóa bởi hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Để tạo nét độc đáo cho chiếc đèn, bạn An muốn trang trí một đoạn ruy băng nối từ một điểm trên cạnh BD đến một điểm trên cạnh bên SC. Chiều dài ngắn nhất của đoạn ruy băng là a (cm). Tìm a.

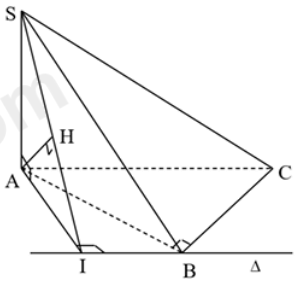




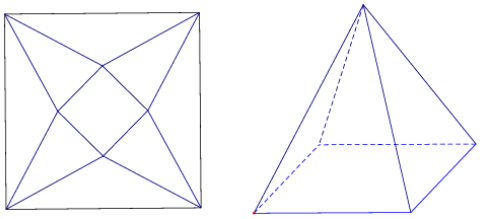
Câu 4: Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao là 21 m và cạnh đáy dài 34 m. Góc nhị diện tạo bởi hai mặt bên có chung một cạnh của kim tự tháp có số đo bằng bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng đơn vị)?



Câu 5: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông cân tại B, AB = 1, SA = 2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB (làm tròn đến hai chữ số phần thập phân).



Câu 6: Cho miếng bìa hình vuông cạnh bằng 5 (m). Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ 4 tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành hình chóp tứ giác đều *(tham khảo hình vẽ bên dưới)*. Để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)



HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng BC'?

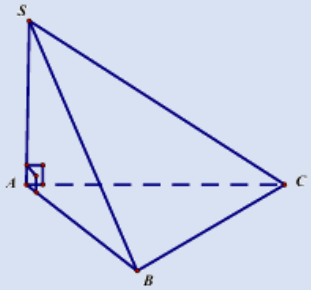
A. A'D. **B.** AC. **C.** BB'. **D.** AD'.

Cách giải:

Ta có $A'D \parallel B'C, B'C \perp BC' \Rightarrow A'D \perp BC'$

Chọn A.

Câu 2: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ dưới).



Khi đó số đo góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) là

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Cách giải:

Do $SA \perp (ABC)$ mà $SA \subset (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (ABC)$.

Vậy số đo góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) là 90°.

Chọn B.

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu của A lên BD và K là hình chiếu của A lên SD. Góc phẳng nhị diện [S, BD, A] là

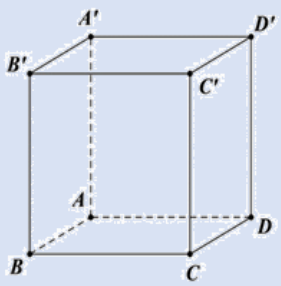
A. SKA. **B.** SBA. **C.** SHA. **D.** SDA.

Cách giải:

Ta có $SH \perp BD$ và $AH \perp BD$ suy ra SHA là góc phẳng nhị diện [S, BD, A].

Chọn C.

Câu 4: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' (tham khảo hình vẽ).



Góc giữa hai đường thẳng AC và C'D' bằng góc

A. $AD'C$. **B.** BCD. **C.** $AC'D$. **D.** ACD.

Cách giải:

Vì ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương nên $C'D'//CD$. Suy ra $(AC,C'D')=(AC,CD)=ACD$.

Chọn D.

Câu 5: Cho hình chóp S.ABC có $SA\perp AB$, $SA\perp AC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $SA\perp(SBC)$. **B.** $SA\perp(ABC)$. **C.** $SA\perp(SAB)$. **D.** $SA\perp(SAC)$.

Cách giải:

Ta có: $SA\perp AB, SA\perp AC$ và AB, AC là hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (ABC) nên $SA\perp(ABC)$.

Chọn A.

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $SD\perp(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $AD\perp(SCD)$. **B.** $BC\perp(SAB)$. **C.** $AC\perp(SBD)$. **D.** $AB\perp(SBC)$.

Cách giải:

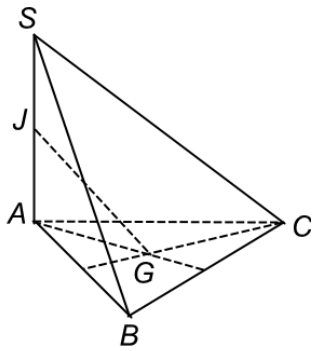
$$\begin{cases} AD\perp CD \\ AD\perp SD \end{cases} \Rightarrow AD\perp(SCD)$$

Chọn A.

Câu 7: Cho hình chóp S.ABC có $SA\perp(ABC)$. Gọi I là trung điểm của SA, G là trọng tâm tam giác ABC. Hình chiếu của đường thẳng IG trên mặt phẳng (ABC) là

A. đường thẳng AB. **B.** đường thẳng BC. **C.** đường thẳng AC. **D.** đường thẳng AG.

Cách giải:



Ta có $SA\perp(ABC)$ tại A mà J là trung điểm của SA nên hình chiếu của J lên mặt phẳng (ABC) là A. Hình chiếu của G lên mặt phẳng (ABC) là G.

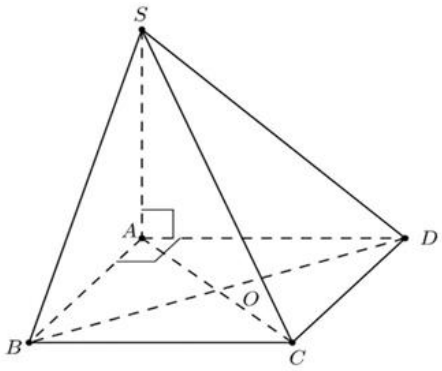
Vậy hình chiếu của đường thẳng JG trên mặt phẳng (ABC) là đường thẳng AG.

Chọn D.

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng vuông góc với (SAC) là

A. (SAB). **B.** (SBD). **C.** (SBC). **D.** (SAD).

Cách giải:



Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ SA \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Mà $BD \subset (SBD)$ nên $(SBD) \perp (SAC)$.

Chọn B.

Câu 9: Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy S = 12 và chiều cao h = 4 là

A. V = 24. **B.** V = 3. **C.** V = 16. **D.** V = 48.

Cách giải:

$V = S.h = 12.4 = 48$

Chọn D.

Câu 10: Chiều cao của khối chóp có thể tích V và diện tích S là

A. $h = \frac{S}{V}$. **B.** $h = \frac{3S}{V}$. **C.** $h = \frac{V}{S}$. **D.** $h = \frac{3V}{S}$.

Cách giải:

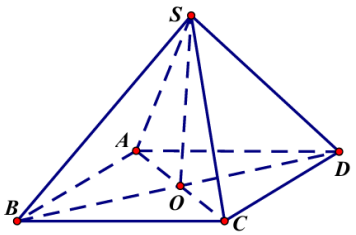
$V = \frac{1}{3} S.h \Rightarrow h = \frac{3V}{S}$

Chọn D.

Câu 11: Một tháp chuông có hình dạng là hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy dài 6m, cạnh bên dài 15m. Chiều cao của tháp chuông bằng

A. $3\sqrt{21}m$. **B.** $3\sqrt{17}m$. **C.** $6\sqrt{6}m$. **D.** $3\sqrt{23}m$.

Cách giải:



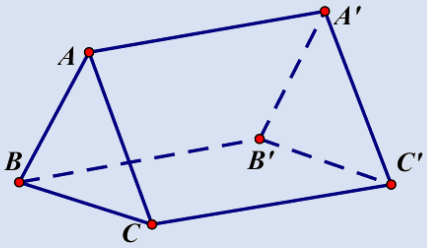
Có $AC = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (m) $\Rightarrow AO = \frac{1}{2} AC = 3\sqrt{2}$ m.

Tam giác SOA vuông tại O có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{15^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{23}$ m.

Vậy chiều cao của tháp chuông là $3\sqrt{23}$ m.

Chọn D.

Câu 12: Một cái lều ở trại hè có dạng hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C'. Cho biết AB = AC = 2m; BC = 3,2m; AA' = 5m. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và B'C'.



A. 1,2m. **B.** 2m. **C.** 3,2m. **D.** 5m.

Cách giải:

Ta có: $(ABC)\,||\,(A'B'C') \Rightarrow d(AB,B'C') = d((ABC),(A'B'C')) = AA' = 5m$.

Chọn A.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi AH, AK lần lượt là đường cao của $\Delta SAB, \Delta SAC$.

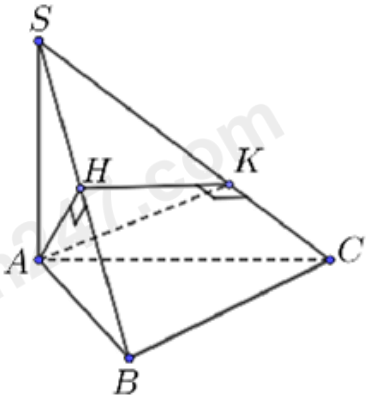
a) $(SC,(ABC)) = 45^\circ$.

b) $(SBC) \perp (SAB)$.

c) $(AHK) \perp (SBC)$.

d) $(AK,(SBC)) = 60^\circ$.

Cách giải:



a) Đúng.

Xét ΔABC vuông tại B, ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SC,(ABC)) = (SC,AC) = SCA$.

Xét ΔSAC vuông tại A, ta có:

$$\tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow SCA = 45^\circ.$$

b) Đúng.

Ta có $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC)$ nên $SA \perp BC$.

Lại có $AB \perp BC$ (vì ΔABC vuông tại B).

Do đó $BC \perp (SAB)$ mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SBC) \perp (SAB)$.

c) Đúng.

Ta có $BC \perp (SAB)$ mà $AH \subset (SAB)$ nên $BC \perp AH$.

Lại có $SB \perp AH$ nên $AH \perp (SBC)$.

Mặt khác $AH \subset (AHK)$ nên $(AHK) \perp (SBC)$.

d) Sai.

Xét ΔSAB vuông tại A, AH là đường cao, ta có:

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$.

$SA.AB = AH.SB \Rightarrow AH = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔSAC vuông tại A, AK là đường cao, ta có:

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$.

$SA.AC = AK.SC \Rightarrow AK = \dfrac{SA.AC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có $AH \perp (SBC)$ nên $(AK,(SBC)) = (AK,HK) = AKH$.

Xét ΔAHK vuông tại H, ta có:

$\sin AKH = \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AKH = 45^\circ$.

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD với đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O và $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC.

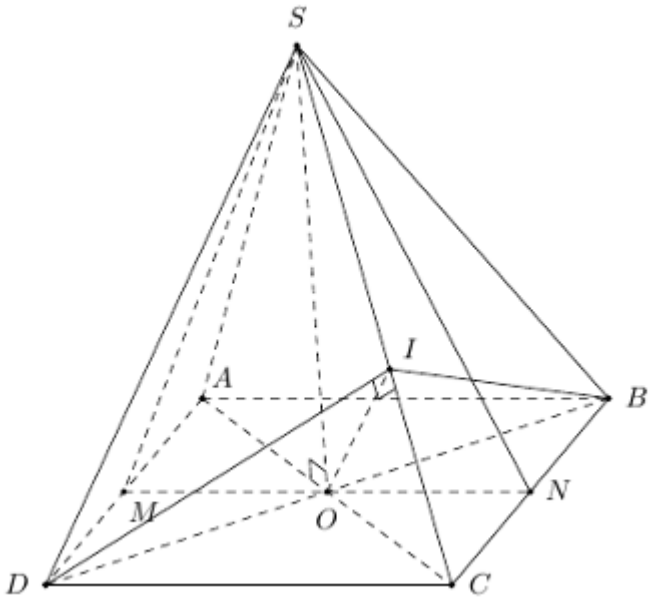
a) $(SMN) \perp (ABCD)$.

b) $(SMN) \perp (SAD)$.

c) $((SBC);(ABCD)) = 30^\circ$.

d) $((SBC);(SCD)) \approx 81^\circ$.

Cách giải:



a) Đúng.

Do $\begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ SO \subset (SMN) \end{cases} \Rightarrow (SMN) \perp (ABCD)$.

b) Đúng.

Do $\begin{cases} AD \perp MN \\ AD \perp SO \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SMN)$.

$\begin{cases} AD \perp (SMN) \\ AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SMN) \perp (SAD)$.

c) Sai.

Ta có $((SBC);(ABCD)) = (SN,NO) = SNO$.

$\tan SNO = \dfrac{SO}{ON} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow SNO = 60^\circ$.

Vậy $((SBC);(ABCD)) = 60^\circ$.

d) Sai.

Vẽ $OI \perp SC$ ta có $((SBC);(SCD)) = (DI, BI)$

Ta có $OD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Tam giác SOC vuông tại O, có đường cao $OI = \dfrac{SO \cdot OC}{\sqrt{SO^2 + OC^2}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

Tam giác DOI vuông tại O, có $\tan DIO = \dfrac{OD}{OI} = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow 2DIO \approx 104^\circ 29'$.

Suy ra $((SBC);(SCD)) = (DI, BI) = 180^\circ - 2DIO \approx 75^\circ 31'$.

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy.

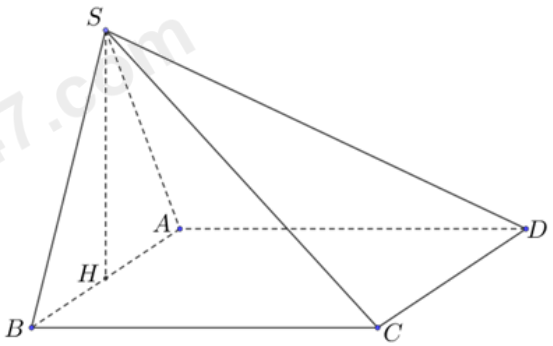
a) Chiều cao hình chóp bằng a.

b) Thể tích khối chóp bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{6}a^3$.

c) Khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB) bằng a.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $\sqrt{2}a$.

Cách giải:



a) Sai

Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó $SH \perp AB$ và $SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Lại có $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$. Vậy chiều cao hình chóp là $SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

b) Đúng

Thể tích khối chóp S.ABCD là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a^3$.

c) Đúng

Ta có $CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (SAB) \Rightarrow d(CD,(SAB)) = d(C,(SAB))$.

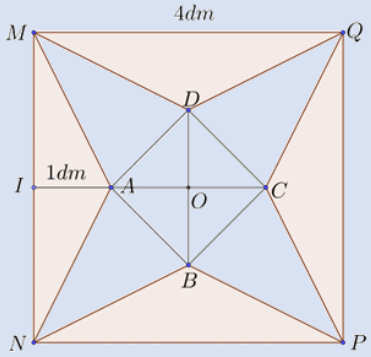
$(SAB) \perp (ABCD), CB \perp AB \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow d(C,(SAB)) = CB = a$.

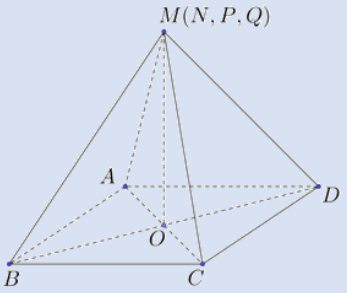
Vậy $d(CD,(SAB))=a$.

d) Sai

Mặt phẳng (SAB) chứa SA và song song với CD nên $d(CD,SA)=d(CD,(SAB))=a$

Câu 4: Từ một tấm tôn hình vuông MNPQ có cạnh bằng 4 dm, người ta cắt tấm tôn theo các tam giác cân MAN, NBP, PCQ, QDM bằng nhau sau đó gò các tam giác cân ABN, BCP, CDQ, DAM sao cho các đỉnh M, N, P, Q trùng nhau để được khối chóp tứ giác đều có đáy là tứ giác ABCD. Biết đường cao kẻ từ A của tam giác MAN bằng 1 dm.





a) Cạnh đáy của hình chóp đều được tạo ra bằng 2 dm.

b) Cạnh bên của hình chóp đều được tạo ra bằng $\sqrt{5}$ dm.

c) Chiều cao của hình chóp đều được tạo ra bằng 2 dm.

d) Thể tích khối chóp đều được tạo ra bằng $\frac{4}{3}$ dm^3.

Cách giải:

Chào bạn, đây là nội dung văn bản được chuyển từ hình ảnh của bạn, giữ nguyên các công thức toán học và định dạng:

a) Sai

Gọi O là tâm hình vuông ABCD. Khi đó $OA=OI-AI=2-1=1$.

Cạnh đáy hình chóp là $AB=\sqrt{2}OA=\sqrt{2}$ dm.

b) Đúng

Cạnh bên của hình chóp $MA=\sqrt{MI^2+IA^2}=\sqrt{5}$ dm.

c) Đúng

Chiều cao hình chóp $MO=\sqrt{MA^2-OA^2}=\sqrt{5-1}=2$ dm.

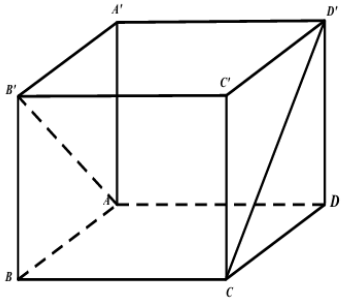
d) Đúng

Thể tích hình chóp $V=\frac{1}{3}MO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot(\sqrt{2})^2=\frac{4}{3}$ dm^3.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính giá trị của $\cos(AB',CD')$.

Cách giải:



Ta có: $CD'//BA' \Rightarrow (AB',CD') = (AB',BA')$.

Vì ABB'A' là hình vuông nên $AB' \perp BA'$.

Suy ra $(AB',CD') = (AB',BA') = 90^\circ$. Do đó: $\cos(AB',CD') = 0$.

Đáp án: 0

Câu 2: Độ dốc của con đường thẳng là tang của góc tạo bởi mặt phẳng chứa mặt con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$. Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Cách giải:

Gọi α là góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang ($0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$).

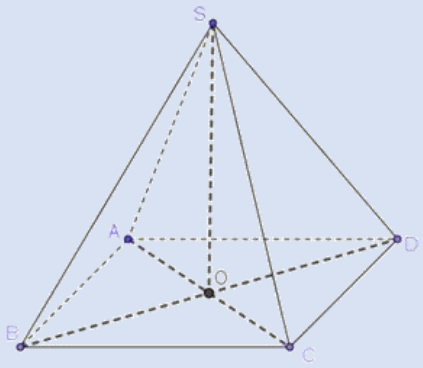
Theo đề ta có $\tan\alpha \le \frac{1}{12} \Rightarrow \alpha \le 4,76^\circ$.

Vậy góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá $4,76^\circ$.

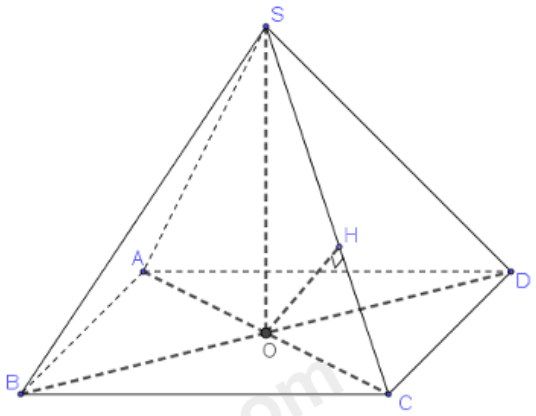
Đáp án: 4,76

Câu 3: Bạn An muốn làm một chiếc đèn lồng bằng gỗ hình chóp tứ giác đều, có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng 20 cm như hình vẽ, được mô hình hóa bởi hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Để tạo nét độc đáo cho chiếc đèn, bạn An muốn trang trí một đoạn ruy băng nối từ một điểm trên cạnh BD đến một điểm trên cạnh bên SC. Chiều dài ngắn nhất của đoạn ruy băng là a (cm). Tìm a.





Cách giải:



Do đèn lồng có dạng hình chóp tứ giác đều được mô hình hóa bởi hình chóp tứ giác đều S.ABCD nên ABCD là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$.

Vì BD và SC chéo nhau nên đoạn ruy băng nối từ một điểm trên cạnh BD đến một điểm trên cạnh bên SC ngắn nhất chính là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BD và SC.

$SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD$. Lại có $BD \perp AC$. Do đó $BD \perp (SAC)$ tại O.

Kẻ $OH \perp SC$ tại H. Vì $\begin{cases} BD \perp (SAC) \\ OH \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow BD \perp OH$ tại O.

Do đó $d(BD;SC) = OH$.

Vì ABCD là hình vuông cạnh 20 cm nên $OC = 10\sqrt{2}$ cm;

$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{20^2 - (10\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{2}$ cm

Tam giác HCO đồng dạng với tam giác OCS nên ta có:

$$OH = \frac{SO \cdot CO}{SC} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2}}{20} = 10 \text{ cm.}$$

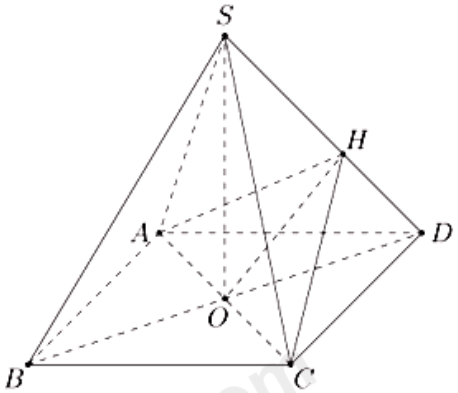
Vậy chiều dài ngắn nhất của đoạn ruy băng là 10 cm.

Đáp án: 10

Câu 4: Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao là 21 m và cạnh đáy dài 34 m. Góc nhị diện tạo bởi hai mặt bên có chung một cạnh của kim tự tháp có số đo bằng bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng đơn vị)?



Cách giải:



Ta mô hình hóa kim tự tháp bằng một hình chóp tứ giác đều S.ABCD như hình vẽ, khi đó $SO = 21$ và $AB = 34$

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD, H là hình chiếu vuông góc của O trên SD.

Khi đó $SD \perp (AHC)$ nên $AHC = [A, SD, C]$.

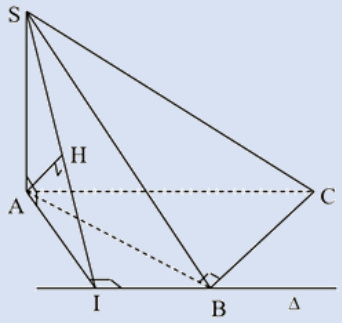
Ta có $OD = \dfrac{CD\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$ nên $OH = \dfrac{SO \cdot OD}{\sqrt{SO^2 + OD^2}} = \dfrac{21 \cdot 17\sqrt{2}}{\sqrt{21^2 + (17\sqrt{2})^2}} = \dfrac{357\sqrt{2}}{\sqrt{1019}}$.

Suy ra: $AH = CH = \sqrt{OH^2 + OC^2} = \sqrt{\dfrac{843880}{1019}}$.

Vậy $\cos AHC = \dfrac{AH^2 + CH^2 - AC^2}{2AH \cdot CH} = -\dfrac{289}{730}$ hay $[A, SD, C] \approx 113^\circ$.

Đáp án: 113

Câu 5: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông cân tại B, AB = 1, SA = 2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB (làm tròn đến hai chữ số phần thập phân).



Cách giải:

Kẻ đường thẳng Δ qua B và song song AC. Kẻ AI vuông góc Δ thì $\Delta \perp (SAI)$. Kẻ $AH \perp SI$ tại H thì $AH \perp (SBI)$.

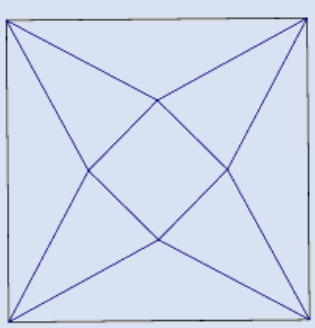
Do đó: $d(AC; SB) = d(AC; (SBI)) = AH$.

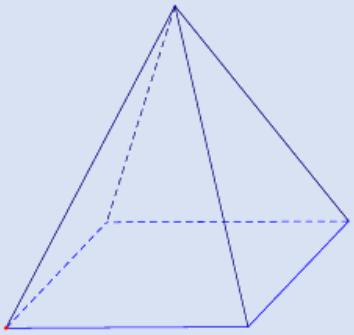
Ta có: $AI = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{9}{4} \Rightarrow AH = \frac{2}{3} \approx 0,67.$$

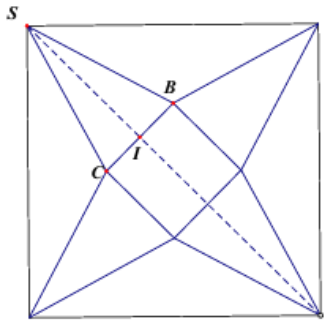
Đáp án: 0,67

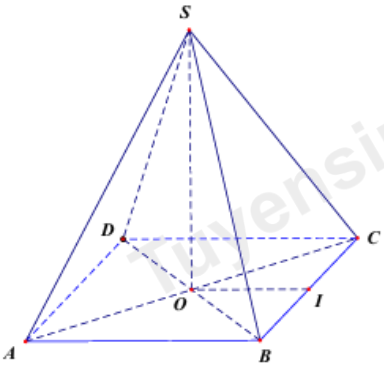
Câu 6: Cho miếng bìa hình vuông cạnh bằng 5 (m). Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ 4 tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành hình chóp tứ giác đều *(tham khảo hình vẽ bên dưới)*. Để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)





Cách giải:





Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông ABCD, điều kiện $0 < x < \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD thì $SO \perp (ABCD)$.

Có $SI = \dfrac{5\sqrt{2}-x}{2}, SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{5\sqrt{2}-x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{5\sqrt{2}-2x}{2}\right)}$.

Có $V = \dfrac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}x^2\sqrt{\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{5\sqrt{2}-2x}{2}\right)} = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{5\sqrt{2}}{2}x^4\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-x\right)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 5 số dương:

Có $\dfrac{x}{4}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{x}{4}+\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-x\right) \geq 5\sqrt[5]{\dfrac{x}{4}\cdot\dfrac{x}{4}\cdot\dfrac{x}{4}\cdot\dfrac{x}{4}\cdot\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-x\right)}$

$\Rightarrow \dfrac{\dfrac{5\sqrt{2}}{2}}{5} \geq \sqrt[5]{\dfrac{x^4}{4^4}\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-x\right)} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} \geq \sqrt[5]{\dfrac{x^4}{4^4}\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-x\right)}$

$\dfrac{x^4}{4^4}\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-x\right) \leq \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 = \dfrac{\sqrt{2}}{8} \Rightarrow x^4\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-x\right) \leq 32\sqrt{2}$

Thay vào biểu thức V:

$$\Rightarrow V \le \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot 32\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\frac{x}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2} - x \Leftrightarrow \frac{5x}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83 \text{ (m)}.$$

Đáp án: 2,83