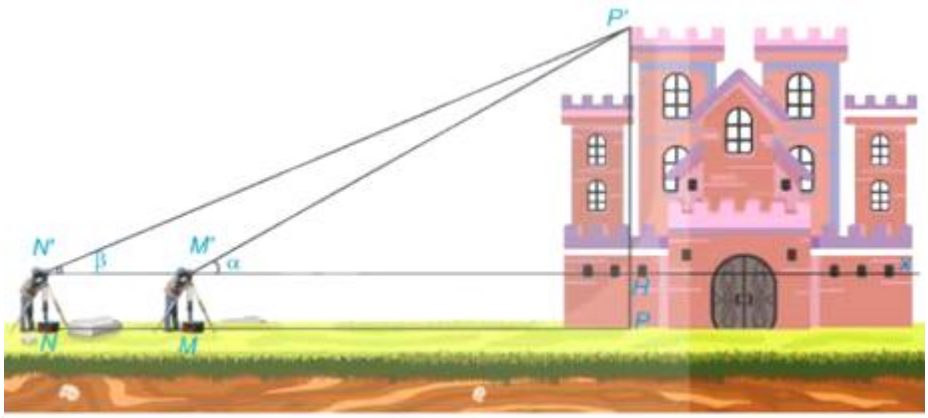
BÀI GIẢNG: HỆ THỨC GIỮA CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG
CHUYÊN ĐỀ: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG
MÔN: TOÁN 9
GIÁO VIÊN: ĐỖ VĂN BẢO

MỤC TIÊU

- ✓ *Xây dựng một số hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông*
- ✓ *Giải tam giác vuông khi biết một số yếu tố*
- ✓ *Áp dụng giải bài tập và một số bài toán thực tế*

Để đo chiều cao của một toà lâu đài (H.4.11), người ta đặt giác kế thẳng đứng tại điểm M. Quay ống ngắm của giác kế sao cho nhìn thấy đỉnh P' của toà lâu đài dưới góc nhọn α. Sau đó, đặt giác kế thẳng đứng tại điểm $N, NM = 20\,\text{m}$, thì nhìn thấy đỉnh P' dưới góc nhọn $\beta(\beta < \alpha)$. Biết chiều cao giác kế là 1,6 m, hãy tính chiều cao của toà lâu đài.



Hình 4.11

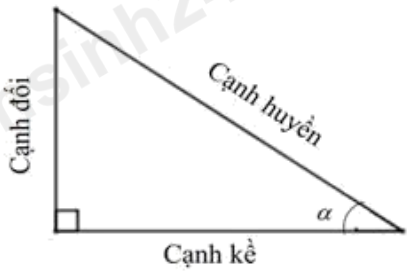
1 Hệ thức giữa cạnh huyền và cạnh góc vuông

Cạnh góc vuông = Cạnh huyền x sin góc đối

Cạnh góc vuông = Cạnh huyền x cosin góc kề

$$\sin\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; \quad \cos\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}; \quad \cot\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$$



2 Hệ thức giữa hai cạnh góc vuông

Cạnh góc vuông = Cạnh góc vuông kia x tang góc đối

Cạnh góc vuông = Cạnh góc vuông kia x cotang góc kề

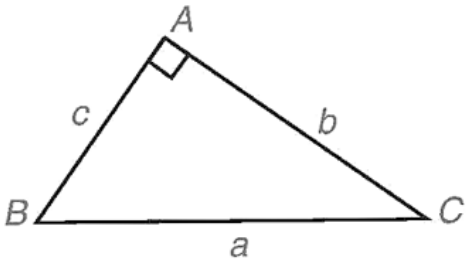
2 Giải tam giác vuông

Là tìm tất cả cách cạnh, góc chưa biết của tam giác vuông đó dựa vào giả thiết.

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng :

a) Cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với côsin góc kề ;

b) Cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với côtang góc kề.

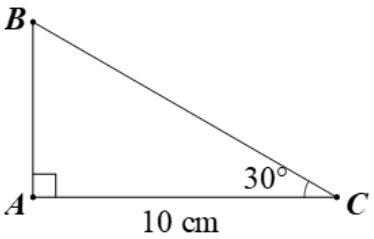


$$b = a\sin B = a\cos C$$
$$b = c\,\mathrm{tg}\,B = c\,\mathrm{cotg}\,C$$
$$c = a\sin C = a\cos B$$
$$c = b\,\mathrm{tg}\,C = b\,\mathrm{cotg}\,B$$

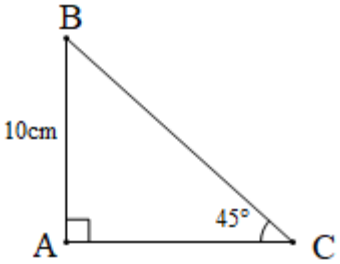
BÀI TẬP

Bài 1. Giải tam giác vuông trong các trường hợp sau:

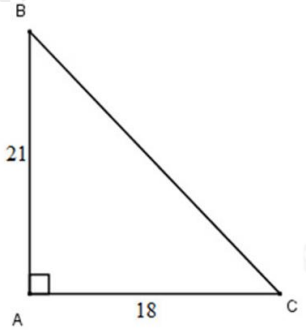
a)



b)



c)



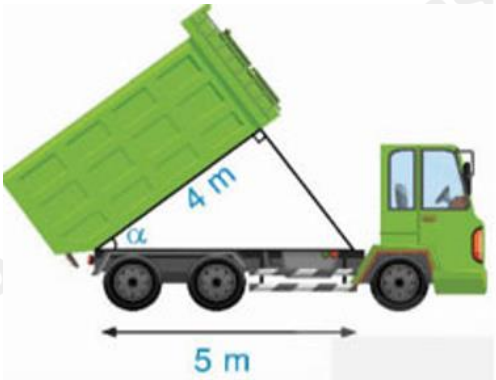
Bài 2. Giải tam giác ABC vuông tại A có $BC = a, AC = b, AB = c$, trong các trường hợp:

a) $a = 21, b = 18$;

b) $b = 10, C = 42^\circ$;

c) $c = 5, b = 3$.

Bài 3. Tính góc nghiêng của thùng xốp.



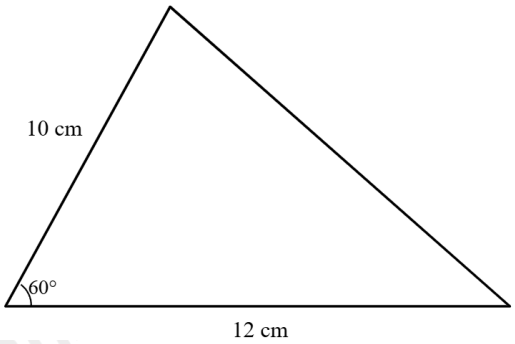
Bài 4. Cho tam giác ABC có góc $B = 38^\circ$; góc $C = 30^\circ$; $BC = 11\text{cm}$. Tính độ dài đường cao AN của tam giác.

Bài 5. Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 5$. Tính diện tích tam giác này trong 2 trường hợp:

a) Góc $A = 60^\circ$;

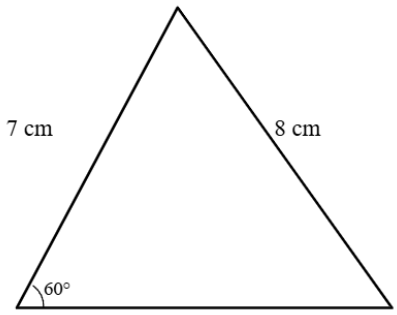
b) Góc $A = 120^\circ$.

BTBS 1. Giải tam giác sau khi biết một số dữ liệu:

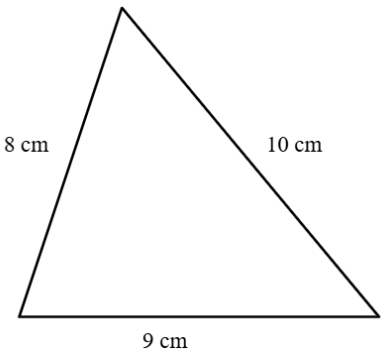


BTBS 2. Giải tam giác sau khi biết một số dữ liệu:

a)



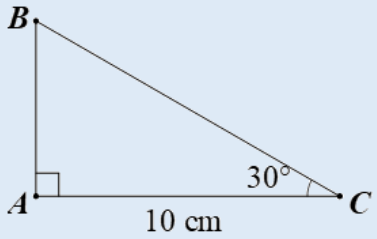
b)



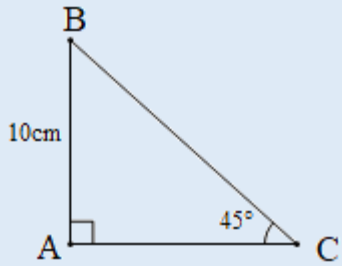
HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Giải tam giác vuông trong các trường hợp sau:

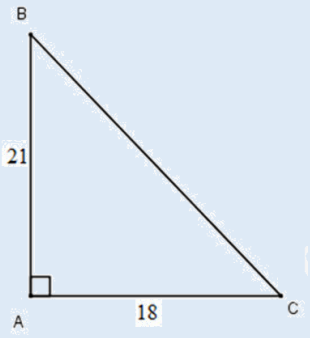
a)



b)



c)



Cách giải:

a) $B = A - C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$\frac{AB}{AC} = \tan C$

$\frac{AB}{10} = \tan 30^\circ$

$AB = 10 \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

b) $B = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

$\dfrac{AB}{AC} = \tan C$

$\dfrac{10}{AC} = \tan 45^\circ$

$AC = \dfrac{10}{\tan 45^\circ} = 10$

* Trong tam giác vuông có một góc bằng 45° thì tam giác đó là tam giác vuông cân.

Suy ra $AB = AC = 10$

c) $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{21^2 + 18^2} = \sqrt{765}$

$\tan C = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{21}{18} = \dfrac{7}{6}$

$C = \tan^{-1}\left(\dfrac{7}{6}\right) \approx 49,4^\circ$

$B = 90^\circ - C = 90^\circ - 49,4^\circ = 40,6^\circ$

Bài 2. Giải tam giác ABC vuông tại A có $BC = a, AC = b, AB = c$, trong các trường hợp:

a) $a = 21, b = 18$;

b) $b = 10, C = 42^\circ$;

c) $c = 5, b = 3$.

Cách giải:

a) Tam giác ABC vuông tại A có

$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{21^2 - 18^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$

$\sin B = \dfrac{b}{a} = \dfrac{18}{21} = \dfrac{6}{7} \Rightarrow B \approx 59^\circ$

$C = 90^\circ - B \approx 31^\circ$

b) $B = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$

$\tan C = \dfrac{AB}{AC}$

$\tan 42^\circ = \dfrac{AB}{10}$

$AB = 10 \tan 42^\circ$

$AB \approx 9$

$\cos C = \dfrac{AC}{BC}$

$\cos 42^\circ = \dfrac{10}{BC}$

$BC = \dfrac{10}{\cos 42^\circ}$

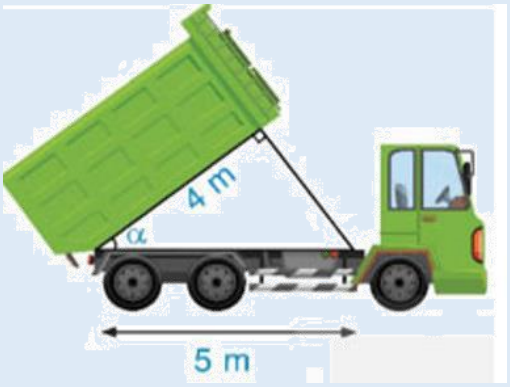
$BC \approx 13,46$

c) $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

$\tan B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow B = \tan^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) \approx 30,96^\circ$

$C = 90^\circ - 30,96^\circ \approx 59,04^\circ$

Bài 3. Tính góc nghiêng của thùng xốp.

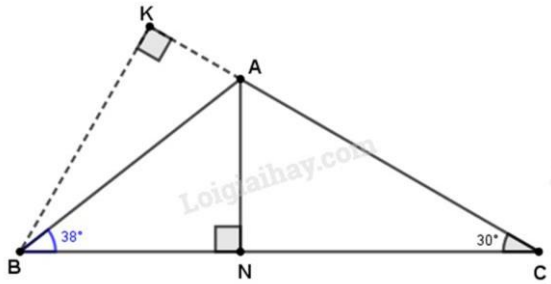


Cách giải:

$\cos \alpha = \dfrac{4}{5}$ nên $\alpha \approx 36^\circ$

Bài 4. Cho tam giác ABC có góc $B = 38^\circ$; góc $C = 30^\circ$; $BC = 11\text{cm}$. Tính độ dài đường cao AN của tam giác.

Cách giải:



Kẻ $BK \perp AC (K \in AC)$.

Trong tam giác vuông BKC có:

$KBC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$\Rightarrow KBA = 60^\circ - 38^\circ = 22^\circ$

$BC = 11(\text{cm}) \Rightarrow BK = 5,5(\text{cm})$ (tính chất cạnh đối diện góc 30° trong tam giác vuông bằng nửa cạnh huyền)

Xét tam giác ABK vuông tại K: $\cos KBA = \dfrac{BK}{AB}$

$\Rightarrow AB = \dfrac{BK}{\cos KBA} = \dfrac{5,5}{\cos 22^\circ} \approx 5,93(\text{cm})$

Xét tam giác ANB vuông tại N : $\sin ABN = \dfrac{AN}{AB}$

$\Rightarrow AN = AB \sin ABN = 5,93 \cdot \sin 38^\circ \approx 3,65(cm)$

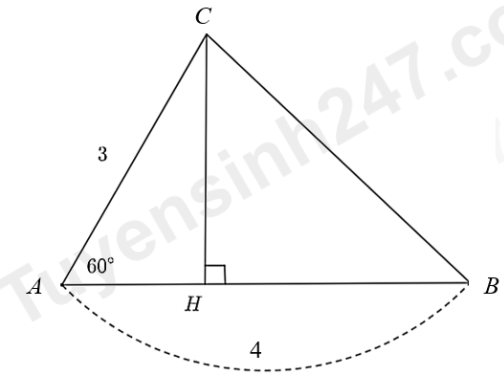
Bài 5. Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 5$. Tính diện tích tam giác này trong 2 trường hợp:

a) Góc $A = 60^\circ$;

b) Góc $A = 120^\circ$.

Cách giải:

a) Kẻ đường cao CH vuông góc với AB tại H.



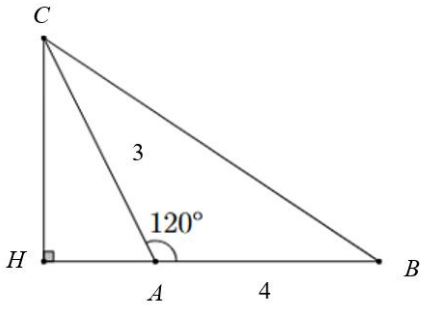
Xét ΔACH vuônng tại H :

$CH = AC \cdot \sin 60^\circ = 5 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

Diện tích tam giác ABC là:

$S = \dfrac{1}{2} \cdot CH \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 5\sqrt{3}$

b) Vì góc $A = 120^\circ$ là góc tù, khi kẻ đường cao CH vuông góc với đường thẳng AB, điểm H sẽ nằm ngoài đoạn thẳng AB



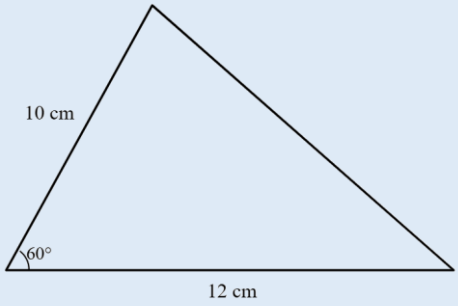
Góc kề bù với góc A là $CAH = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Xét ΔACH, vuông tại H :

$CH = AC \cdot \sin 60^\circ = 5 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

Diện tích tam giác ABC vẫn tính theo công thức đáy nhân đường cao tương ứng: $S = \dfrac{1}{2} \cdot CH \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 5\sqrt{3}$

BTBS 1. Giải tam giác sau khi biết một số dữ liệu:



Cách giải:

Kẻ đường cao $AH \perp BC (H \in BC)$. Ta có ΔABH vuông tại H , suy ra

$BH = AB \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5(\text{cm})$

$AH = AB \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}(\text{cm}) \approx 8.66(\text{cm})$

$BAH = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

* Xét ΔACH vuông tại H, có

$HC = BC - BH = 12 - 5 = 7(\text{cm})$

$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 7^2} = \sqrt{75+49} = \sqrt{124} = 2\sqrt{31}\,(\text{cm})$

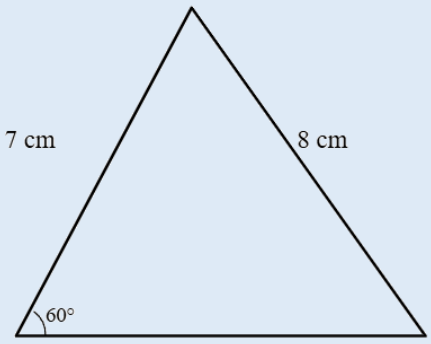
$\tan C = \frac{AH}{HC} = \frac{5\sqrt{3}}{7} \Rightarrow C \approx 51^\circ$

$CAH = 90^\circ - \hat{C} \approx 90^\circ - 51^\circ = 39^\circ$

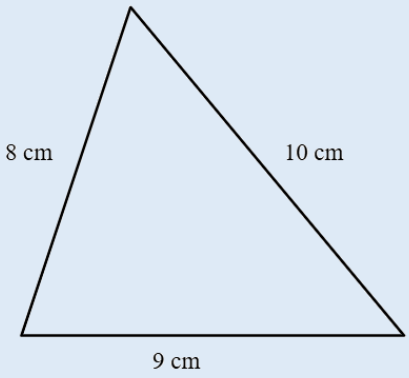
$\Rightarrow A = BAH + CAH \approx 30^\circ + 39^\circ = 69^\circ$

BTBS 2. Giải tam giác sau khi biết một số dữ liệu:

a)

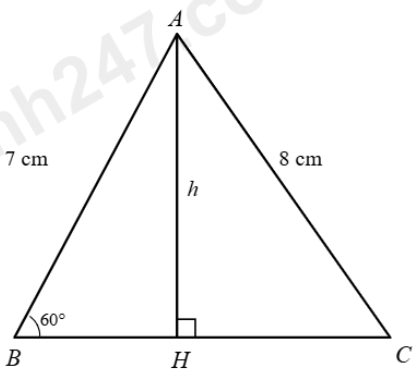


b)



Cách giải:

a) Kẻ đường cao $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Xét ΔABH vuông tại H :



$BH = AB \cdot \cos 60^\circ = 7 \cdot 0,5 = 3,5\,\text{cm}$

$AH = AB \cdot \sin 60^\circ = 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 6,06\,\text{cm}$

$BAH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Xét ΔACH vuông tại H :

$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{8^2 - \left(7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{64 - 36,75} = \sqrt{27,25} \approx 5,22\ \text{cm}$

$\Rightarrow BC = BH + CH = 3,5 + 5,22 = 8,72\ \text{cm}$

$\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{6,06}{8} \approx 0,7575 \Rightarrow C \approx 49,25^\circ$

$CAH = 90^\circ - C \approx 90^\circ - 49,25^\circ = 40,75^\circ$

$\Rightarrow A = BAH + CAH = 30^\circ + 40,75^\circ = 70,75^\circ$

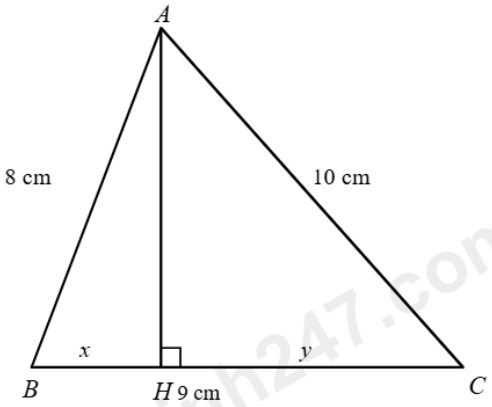
b) Kẻ đường cao $AH \perp BC$. Đặt $BH = x$ và $CH = y$. Theo đề bài và hình vẽ, ta có:

Tổng độ dài: $x + y = 9$ (1)

Áp dụng định lý Pythagore cho hai tam giác vuông ΔABH và ΔACH để biểu diễn AH^2 :

$AH^2 = AB^2 - x^2 = 8^2 - x^2 = 64 - x^2$

$AH^2 = AC^2 - y^2 = 10^2 - y^2 = 100 - y^2$



Cho hai biểu thức của AH^2 bằng nhau:

$64 - x^2 = 100 - y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 64 - 100 = -36$ (2)

từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x^2 - y^2 = -36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{13}{2} \end{cases}$$

Suy ra $BH = 2,5\text{cm}, CH = 6,5\text{cm}$

$AH = \sqrt{8^2 - 2,5^2} = \sqrt{57,75} \approx 7,60\text{cm}$

Xét ΔABH vuông tại H : $\cos B = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{2,5}{8} = 0,3125 \Rightarrow B \approx 71,79^\circ$

Xét ΔACH vuông tại H : $\cos C = \dfrac{CH}{AC} = \dfrac{6,5}{10} = 0,65 \Rightarrow C = 49,46^\circ$

Suy ra $A = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 180^\circ - 71,79^\circ - 49,46^\circ \Rightarrow A \approx 58,7555^\circ$