BÀI GIẢNG: ÔN TẬP ĐẠO HÀM
CHUYÊN ĐỀ: TỔNG ÔN ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH LỚP 10, 11
MÔN: TOÁN 12
GIÁO VIÊN: NGUYỄN HOÀNG TÙNG

MỤC TIÊU

- ✓ *Rèn luyện kỹ năng tính đạo hàm, vận dụng linh hoạt các công thức để giải các bài toán từ cơ bản đến vận dụng, làm nền tảng cho chương trình Toán 12 và kỳ thi tốt nghiệp THPT*

ĐỀ BÀI

I PHẦN I: CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1: Tính giá trị của giới hạn $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$.

A. $\cos(xh)$ **B.** $-\sin(xh)$ **C.** $-\sin x$ **D.** $\cos x$

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=x(x-1)(x-2)...(x-2025)$ tại điểm $x=0$.

A. $f'(0)=0$. **B.** $f'(0)=2025$. **C.** $f'(0)=2025!$. **D.** $f'(0)=-2025!$.

Câu 3: Đạo hàm của hàm số $y=\sin^2(x^2)$ là

A. $y'=2\sin(x^2)$. **B.** $y'=4x\sin(x^2)$. **C.** $y'=2x\sin(2x^2)$. **D.** $y'=4x\cos(x^2)$.

Câu 4: Biết rằng $F(x)=3x^2+e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Giá trị của $f(2)=a+2e^b$, trong đó $a,b\in\mathbb{N}$. Giá trị của biểu thức $T=a+b$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(9;11)$. **B.** $(11;13)$. **C.** $(3;15)$. **D.** $(15;17)$.

Câu 5: Cho $f(x)=\dfrac{1-3x+x^2}{x-1}$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x)>0$ là:

A. $\mathbb{R}$ **B.** $\varnothing$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 6: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x=0$ là

A. $y=-2x-3$. **B.** $y=2x-3$. **C.** $y=2x+3$. **D.** $y=-2x+3$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\ln(x^2-x+1)$. Đạo hàm của hàm số tại $x=2$ là

A. $f'(2)=0$. **B.** $f'(2)=1$. **C.** $f'(2)=2$. **D.** $f'(2)=-1$.

Câu 8: Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3-2x^2-3x+1(C)$. Trong các tiếp tuyến với (C), tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu:

A. $k=3$. **B.** $k=2$. **C.** $k=1$. **D.** $k=0$.

Câu 9: Dân số của Việt Nam sau t năm tính từ năm 2023 được dự đoán theo công thức $N(t)=100.e^{0,012t}$ với $N(t)$ tính theo đơn vị triệu người và $0<t\le 50$. Cho biết đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ gia tăng dân số của Việt Nam (đơn vị là triệu người/năm). Hỏi bắt đầu từ năm nào thì tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/năm?

A. 2056 **B.** 2066 **C.** 2065 **D.** 2055

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$. Tính giá trị biểu thức $S=f'(1)+f'(2)+...+f'(2025)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{2024}{2025}$. **D.** $\frac{2025}{2026}$.

II PHẦN II: CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$ và $g(x)=x\ln x$.

a) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\frac{5}{(x+2)^2}$

b) Hàm số $g(x)$ có đạo hàm là $g'(x)=\ln x+1$.

c) $f'(-1)-g'(e)=2$

d) Phương trình $(x+2)^2 f'(x)=g'(x)$ có hai nghiệm.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=\ln\frac{x}{x+1}-2025$.

a) Tập xác định của hàm số là $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

b) Đạo hàm của hàm số là $y'=-\frac{1}{x^2+x}$.

c) Giá trị $y'(3)$ bằng $\frac{13}{12}$.

d) Tổng $T=f'(1)+f'(2)+...+f'(2025)$ bằng $\frac{2025}{2026}$.

Câu 3: Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=s(t)=t^3-3t^2-9t$ trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét.

a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t=5$s là 36m/s.

b) Gia tốc của vật tại thời điểm $t=3$s là 6m/s^2.

c) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là 12m/s^2.

d) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu là 12m/s.

III PHẦN III: CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}+2x^2-3x+5$, biết $y'=ax^2+bx+c$. Tính $2a+3b+100c$.

Câu 2: Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)$(km) là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t)=e^{t^2+3}+2te^{3t+1}$(km). Hỏi vận tốc của tên lửa sau 1 giây là bao nhiêu (biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian) ae^b(km/s) tính $a+2b$

Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{2m-1}{3}x^3-mx^2+x+m^2-1$, m là tham số. Tìm điều kiện của tham số m để $y'\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 4: Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+9x-1$ có đồ thị là (C). Tìm hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến tại một điểm M trên đồ thị (C).

Câu 5: Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t)=15+\sqrt{2}\sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t=3$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

HƯỚNG DẪN GIẢI

I PHẦN I: CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1: Tính giá trị của giới hạn $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$.

A. $\cos(xh)$ **B.** $-\sin(xh)$ **C.** $-\sin x$ **D.** $\cos x$

Cách giải:

Ta có $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ chính là đạo hàm của hàm số $y=\cos x$.

Suy ra $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=(\cos x)'=-\sin x$.

Đáp án: C

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=x(x-1)(x-2)...(x-2025)$ tại điểm $x=0$.

A. $f'(0)=0$. **B.** $f'(0)=2025$. **C.** $f'(0)=2025!$. **D.** $f'(0)=-2025!$.

Cách giải:

Ta có $f(0)=0(0-1)(0-2)...(0-2025)=0$.

Đạo hàm của hàm số tại $x=0$ là:

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-1)(x-2)...(x-2025)-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)(x-2)...(x-2025)$

$=(-1)(-2)...(-2025)=-(1.2...2025)=-2025!$.

Đáp án: D

Câu 3: Đạo hàm của hàm số $y=\sin^2(x^2)$ là

A. $y'=2\sin(x^2)$. **B.** $y'=4x\sin(x^2)$. **C.** $y'=2x\sin(2x^2)$. **D.** $y'=4x\cos(x^2)$.

Cách giải:

$y'=2\sin(x^2).(\sin(x^2))'$ $y'=2\sin(x^2).\cos(x^2).(x^2)'$ $y'=2\sin(x^2).\cos(x^2).2x$ $y'=2x\sin(2x^2)$.

Đáp án: C

Câu 4: Biết rằng $F(x)=3x^2+e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Giá trị của $f(2)=a+2e^b$, trong đó $a,b\in\mathbb{N}$. Giá trị của biểu thức $T=a+b$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(9;11)$. **B.** $(11;13)$. **C.** $(3;15)$. **D.** $(15;17)$.

Cách giải:

Vì $F(x)=3x^2+e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $f(x)=F'(x)=(3x^2+e^{2x})'=6x+2e^{2x}$.

Suy ra $f(2)=6.2+2e^{2.2}=12+2e^4$.

Theo đề bài $f(2)=a+2e^b$ nên $\begin{cases}a=12\\b=4\end{cases}$.

Vậy $T=a+b=12+4=16$. Ta thấy $16\in(15;17)$.

Đáp án: D

Câu 5: Cho $f(x)=\dfrac{1-3x+x^2}{x-1}$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x)>0$ là:

A. $\mathbb{R}$ **B.** $\varnothing$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Cách giải:

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta viết lại hàm số: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$.

Đạo hàm của hàm số là:

$f'(x)=\dfrac{(2x-3)(x-1)-(x^2-3x+1).1}{(x-1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{2x^2-2x-3x+3-x^2+3x-1}{(x-1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$

Ta thấy tử thức $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Mẫu thức $(x-1)^2>0$ với mọi $x\neq 1$.

Do đó $f'(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}>0$ với mọi $x\in D$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f'(x)>0$ là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Đáp án: D

Câu 6: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x=0$ là

A. $y=-2x-3$. **B.** $y=2x-3$. **C.** $y=2x+3$. **D.** $y=-2x+3$.

Cách giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Với hoành độ tiếp điểm $x_0=0$, ta có tung độ tiếp điểm là $y_0=\dfrac{-0+3}{0-1}=-3$.

Đạo hàm của hàm số là: $y'=\dfrac{-1.(-1)-1.3}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $x_0=0$ là $y'(0)=\dfrac{-2}{(0-1)^2}=-2$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-2(x-0)-3\Leftrightarrow y=-2x-3$.

Đáp án: A

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\ln(x^2-x+1)$. Đạo hàm của hàm số tại $x=2$ là

A. $f'(2)=0$. **B.** $f'(2)=1$. **C.** $f'(2)=2$. **D.** $f'(2)=-1$.

Cách giải:

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ vì $x^2-x+1=(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}>0$ với mọi x.

Đạo hàm của hàm số là: $f'(x)=\dfrac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

Thay $x=2$ vào đạo hàm ta được: $f'(2)=\dfrac{2.2-1}{2^2-2+1}=\dfrac{3}{3}=1$.

Đáp án: B

Câu 8: Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3-2x^2-3x+1(C)$. Trong các tiếp tuyến với (C), tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu:

A. $k=3$. **B.** $k=2$. **C.** $k=1$. **D.** $k=0$.

Cách giải:

Đạo hàm của hàm số là: $y'=-x^2-4x-3$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x là $k=-x^2-4x-3$.

Ta biến đổi biểu thức của k như sau:

$k=-(x^2+4x+4)+1=-(x+2)^2+1$.

Vì $-(x+2)^2\le 0$ với mọi số thực x, nên $k=-(x+2)^2+1\le 1$ với mọi số thực x.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x+2=0\Leftrightarrow x=-2$.

Vậy hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến là $k=1$.

Đáp án: C

Câu 9: Dân số của Việt Nam sau t năm tính từ năm 2023 được dự đoán theo công thức $N(t)=100.e^{0,012t}$ với $N(t)$ tính theo đơn vị triệu người và $0<t\le 50$. Cho biết đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ gia tăng dân số của Việt Nam (đơn vị là triệu người/năm). Hỏi bắt đầu từ năm nào thì tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/năm?

A. 2056 **B.** 2066 **C.** 2065 **D.** 2055

Cách giải:

Đạo hàm của hàm số là: $N'(t)=100.0,012.e^{0,012t}=1,2.e^{0,012t}$.

Để tốc độ gia tăng dân số lớn hơn 2 triệu người/năm, ta cần có:

$N'(t)>2\Leftrightarrow 1,2.e^{0,012t}>2\Leftrightarrow e^{0,012t}>\dfrac{5}{3}$

$\Leftrightarrow 0,012t>\ln(\dfrac{5}{3})$

$\Leftrightarrow t>\dfrac{\ln(\frac{5}{3})}{0,012}\approx 42,57$.

Vì t là số năm tính từ 2023, nên năm nhỏ nhất để tốc độ gia tăng vượt 2 triệu người/năm tương ứng với giá trị nguyên nhỏ nhất của t lớn hơn 42,57, đó là $t=43$.

Năm tương ứng là $2023+43=2066$.

Vậy bắt đầu từ năm 2066 thì tốc độ gia tăng dân số sẽ lớn hơn 2 triệu người/năm.

Đáp án: B

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$. Tính giá trị biểu thức $S=f'(1)+f'(2)+...+f'(2025)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{2024}{2025}$. **D.** $\dfrac{2025}{2026}$.

Cách giải:

Với các giá trị $x\in\{1;2;...;2025\}$, ta luôn có $x>0$ và $x+1>0$.

Hàm số được viết lại thành: $f(x)=\ln x-\ln(x+1)$.

Đạo hàm của hàm số là: $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

Thay lần lượt các giá trị $x=1,2,...,2025$ vào biểu thức $f'(x)$, ta được:

$f'(1)=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

$f'(2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

...

$f'(2025)=\frac{1}{2025}-\frac{1}{2026}$

Cộng vế theo vế các biểu thức trên, ta tính được tổng S:

$S=f'(1)+f'(2)+...+f'(2025)$

$S=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{2025}-\frac{1}{2026}\right)$

$S=1-\frac{1}{2026}=\frac{2025}{2026}.$

Đáp án: D

II PHẦN II: CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$ và $g(x)=x\ln x$.

a) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\frac{5}{(x+2)^2}$

b) Hàm số $g(x)$ có đạo hàm là $g'(x)=\ln x+1$.

c) $f'(-1)-g'(e)=2$

d) Phương trình $(x+2)^2 f'(x)=g'(x)$ có hai nghiệm.

Cách giải:

a) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Đạo hàm $f'(x)=\frac{1.2-(-3).1}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$.

Vậy mệnh đề a đúng.

b) Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D=(0;+\infty)$.

Đạo hàm $g'(x)=(x)'.\ln x+x.(\ln x)'=1.\ln x+x.\frac{1}{x}=\ln x+1.$

Vậy mệnh đề b đúng.

c) Ta có $f'(-1)=\frac{5}{(-1+2)^2}=\frac{5}{1}=5.$

Và $g'(e)=\ln e+1=1+1=2.$

Khi đó $f'(-1)-g'(e)=5-2=3$.

Theo đề bài giá trị là 2 nên mệnh đề c sai.

d) Xét phương trình $(x+2)^2 f'(x)=g'(x)$. Điều kiện: $x>0$.

Thay biểu thức của $f'(x)$ và $g'(x)$ vào, ta được:

$$(x+2)^2.\frac{5}{(x+2)^2}=\ln x+1$$

$$\Leftrightarrow 5=\ln x+1$$

$$\Leftrightarrow \ln x=4$$

$\Leftrightarrow x=e^4$ (thỏa mãn điều kiện $x>0$).

Phương trình chỉ có một nghiệm duy nhất $x=e^4$.

Vậy mệnh đề d sai.

Đáp án: a) Đúng, b) Đúng, c) Sai, d) Sai

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=\ln\frac{x}{x+1}-2025$.

a) Tập xác định của hàm số là $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

b) Đạo hàm của hàm số là $y'=-\frac{1}{x^2+x}$.

c) Giá trị $y'(3)$ bằng $\frac{13}{12}$.

d) Tổng $T=f'(1)+f'(2)+...+f'(2025)$ bằng $\frac{2025}{2026}$.

Cách giải:

a) Điều kiện xác định của hàm số là $\frac{x}{x+1}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>0\\x<-1\end{array}\right.$.

Vậy tập xác định là $D=(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

Mệnh đề a đúng.

b) Với $x\in D$, ta có:

$$y'=\left(\ln\frac{x}{x+1}-2025\right)'=\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\frac{x}{x+1}}=\frac{\frac{1.(x+1)-x.1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}=\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x^2+x}.$$

Theo đề bài $y'=-\frac{1}{x^2+x}$, nên mệnh đề b sai.

c) Thay $x=3$ vào biểu thức đạo hàm ta được:

$$y'(3)=\frac{1}{3^2+3}=\frac{1}{12}.$$

Đề bài cho bằng $\frac{13}{12}$, nên mệnh đề c sai.

d) Ta có $f'(x)=\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

Tính tổng $T=f'(1)+f'(2)+...+f'(2025)$

$T=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{2025}-\frac{1}{2026}\right)$

$T=1-\frac{1}{2026}=\frac{2025}{2026}$.

Vậy mệnh đề d đúng.

Đáp án: a) Đúng, b) Sai, c) Sai, d) Đúng

Câu 3: Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=s(t)=t^3-3t^2-9t$ trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét.

a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t=5\text{s}$ là 36m/s.

b) Gia tốc của vật tại thời điểm $t=3\text{s}$ là 6m/s^2.

c) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là 12m/s^2.

d) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu là 12m/s.

Cách giải:

Phương trình vận tốc của vật là: $v(t)=s'(t)=(t^3-3t^2-9t)'=3t^2-6t-9$.

Phương trình gia tốc của vật là: $a(t)=v'(t)=(3t^2-6t-9)'=6t-6$.

Điều kiện thời gian $t\ge 0$.

a) Tại thời điểm $t=5\text{s}$, vận tốc của vật là:

$v(5)=3.5^2-6.5-9=75-30-9=36$ (m/s).

Vậy mệnh đề a đúng.

b) Tại thời điểm $t=3\text{s}$, gia tốc của vật là:

$a(3)=6.3-6=18-6=12$ (m/s²).

Đề bài cho là 6m/s^2, nên mệnh đề b sai.

c) Vận tốc triệt tiêu khi $v(t)=0\Leftrightarrow 3t^2-6t-9=0$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-1\text{ (loai vì } t\ge 0)\end{array}\right.$.

Tại thời điểm $t=3\text{s}$, gia tốc là $a(3)=12$ (m/s²).

Vậy mệnh đề c đúng.

d) Gia tốc triệt tiêu khi $a(t)=0\Leftrightarrow 6t-6=0\Leftrightarrow t=1$ (thỏa mãn $t\ge 0$).

Tại thời điểm $t=1\text{s}$, vận tốc là:

$v(1)=3.1^2-6.1-9=3-6-9=-12$ (m/s).

Ta thấy $-12\neq 12$, nên mệnh đề d sai.

Đáp án: a) Đúng, b) Sai, c) Đúng, d) Sai

III PHẦN III: CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}+2x^2-3x+5$, biết $y'=ax^2+bx+c$. Tính $2a+3b+100c$.

Cách giải:

Ta có đạo hàm của hàm số là:

$$y'=\left(\frac{x^3}{3}+2x^2-3x+5\right)'=x^2+4x-3.$$

Theo đề bài, $y'=ax^2+bx+c$.

Đồng nhất hệ số, ta được: $a=1,b=4,c=-3$.

Giá trị của biểu thức cần tính là:

$2a+3b+100c=2(1)+3(4)+100(-3)=2+12-300=-286$.

Đáp án: -286

Câu 2: Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)$(km) là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t)=e^{t^2+3}+2te^{3t+1}$(km). Hỏi vận tốc của tên lửa sau 1 giây là bao nhiêu (biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian) ae^b(km/s) tính $a+2b$

Cách giải:

Phương trình vận tốc của tên lửa là:

$$v(t)=s'(t)=\left(e^{t^2+3}+2te^{3t+1}\right)'$$

$$v(t)=(t^2+3)'.e^{t^2+3}+(2t)'.e^{3t+1}+2t.(e^{3t+1})'$$

$$v(t)=2t.e^{t^2+3}+2.e^{3t+1}+2t.3.e^{3t+1}$$

$$v(t)=2t.e^{t^2+3}+(2+6t)e^{3t+1}.$$

Vận tốc của tên lửa sau 1 giây là (thay $t=1$):

$v(1)=2(1).e^{1^2+3}+(2+6(1))e^{3(1)+1}=2e^4+8e^4=10e^4$ (km/s).

Theo giả thiết, $v(1)=ae^b$, suy ra $a=10$ và $b=4$.

Giá trị của biểu thức là: $a+2b=10+2(4)=18$.

Đáp án: 18

Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{2m-1}{3}x^3-mx^2+x+m^2-1$, m là tham số. Tìm điều kiện của tham số m để $y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Cách giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=(2m-1)x^2-2mx+1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow (2m-1)x^2-2mx+1\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Trường hợp 1: $2m-1=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Khi đó $y'=-x+1\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1$.

Điều này không đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên $m=\frac{1}{2}$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $2m-1\neq 0\Leftrightarrow m\neq\frac{1}{2}$.

$$y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2m-1>0\\ \Delta'=(-m)^2-(2m-1).1\leq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>\frac{1}{2}\\ m^2-2m+1\leq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>\frac{1}{2}\\ (m-1)^2\leq 0\end{cases}$$

Vì $(m-1)^2\geq 0,\forall m\in\mathbb{R}$ nên để $(m-1)^2\leq 0$ thì bắt buộc $(m-1)^2=0\Leftrightarrow m=1$.

Giá trị $m=1$ thỏa mãn điều kiện $m>\frac{1}{2}$.

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Đáp án: 1

Câu 4: Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+9x-1$ có đồ thị là (C). Tìm hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến tại một điểm M trên đồ thị (C).

Cách giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x là:

$k=y'=-3x^2+6x+9$.

Biến đổi biểu thức k ta được:

$k=-3(x^2-2x)+9=-3(x^2-2x+1)+3+9=-3(x-1)^2+12$.

Vì $-3(x-1)^2 \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $k = -3(x-1)^2 + 12 \le 12$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến là 12.

Đáp án: 12

Câu 5: Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t) = 15 + \sqrt{2}\sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 3$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Cách giải:

Phương trình vận tốc của hạt là:

$$v(t) = s'(t) = \left(15 + \sqrt{2}\sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right)'$$

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot 4\pi \cdot \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 4\pi\sqrt{2}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Phương trình gia tốc của hạt là:

$$a(t) = v'(t) = \left(4\pi\sqrt{2}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right)'$$

$$a(t) = 4\pi\sqrt{2} \cdot (-4\pi) \cdot \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = -16\pi^2\sqrt{2}\sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Tại thời điểm $t = 3$ giây, gia tốc của hạt là:

$$a(3) = -16\pi^2\sqrt{2}\sin\left(4\pi.3 + \frac{\pi}{6}\right) = -16\pi^2\sqrt{2}\sin\left(12\pi + \frac{\pi}{6}\right).$$

Vì hàm sin có chu kỳ 2π nên $\sin\left(12\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Do đó: $a(3) = -16\pi^2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = -8\pi^2\sqrt{2}$ (cm/s²).

Ta có giá trị gần đúng: $a(3) \approx -8 \cdot (3{,}14159)^2 \cdot 1{,}4142 \approx -111{,}666...$

Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất ta được $-111{,}7$.

Đáp án: -111,7